

Wykład 10

Reakcje termojądrowe w gwiazdach -
uzupełnienie.

Równania budowy wewnętrznej gwiazd.

Modele homologiczne.

Niestabilność cieplna.

05.12.2019

Termiczna skala czasu

Pierwsze etapy ewolucji: kurczenie się protogwiazd.

Termiczna skala czasu (Kelvina - Helmholtza).

Dla kul w równowadze hydrostatycznej $E = W/2$, czyli

$$\tau_{KH} \approx \frac{GM^2}{2RL} \quad (1)$$

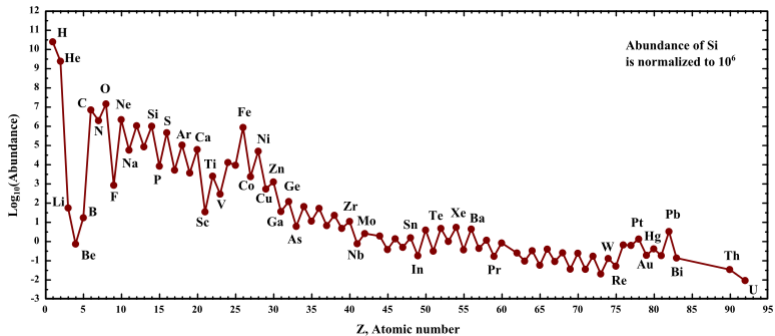
Dla Słońca $\frac{GM^2}{2R} = 1.9 \cdot 10^{48} \text{ erg}$, $L = 3.86 \cdot 10^{33} \text{ erg/s}$,

$\tau_{KH} \approx 4.9 \cdot 10^{14} \text{ s} \approx 1.56 \cdot 10^7 \text{ lat}$

W miarę wzrostu temperatury w centrum coraz więcej energii jest produkowane przez reakcje termojądrowe aż tempo produkcji energii w gwiazdzie osiągnie poziom strat na jej powierzchni.

- ▶ Reakcje termojądrowe postulowane jako źródło energii gwiazd przez Eddingtona (1920), ale temperatura wnętrza Słońca zbyt niska aby przezwyciężyć barierę Coulomba.
- ▶ Odkrycie efektu tunelowego przez G. Gamowa (1928) praca Atkinsona i Houtermansa (1929) dotycząca reakcji termojądrowych w gwiazdach
- ▶ Cykl p-p opisany niezależnie przez Weizsackera (1937) (reakcja p-p) i Bethego i Critchfielda (1938) (całość cyklu)
- ▶ Cykl CN(O) opisany niezależnie przez Weizsackera (1938) Bethego (1939)
- ▶ Reakcje jądrowe w gwiazdach - główne źródło powstania pierwiastków cięższych niż hel. W wyniku pierwotnej nukleosyntezy powstał wodór, hel i śladowe ilości pierwiastków takich jak lit, beryl.

Zawartość pierwiastków



Rysunek:

Pochodzenie pierwiastków

Big Bang fusion Cosmic ray fission Dying low-mass stars Merging neutron stars Exploding massive stars Exploding white dwarfs Human synthesis No stable isotopes																		He 2					
H 1	Li 3	Be 4																B 5	C 6	N 7	O 8	F 9	Ne 10
Na 11	Mg 12																Al 13	Si 14	P 15	S 16	Cl 17	Ar 18	
K 19	Ca 20	Sc 21	Ti 22	V 23	Cr 24	Mn 25	Fe 26	Co 27	Ni 28	Cu 29	Zn 30	Ga 31	Ge 32	As 33	Se 34	Br 35	Kr 36						
Rb 37	Sr 38	Y 39	Zr 40	Nb 41	Mo 42	Tc 43	Ru 44	Rh 45	Pd 46	Ag 47	Cd 48	In 49	Sn 50	Sb 51	Te 52	I 53	Xe 54						
Cs 55	Ba 56			Hf 72	Ta 73	W 74	Re 75	Os 76	Ir 77	Pt 78	Au 79	Hg 80	Tl 81	Pb 82	Bi 83	Po 84	At 85	Rn 86					
Fr 87	Ra 88																						
		La 57	Ce 58	Pr 59	Nd 60	Pm 61	Sm 62	Eu 63	Gd 64	Tb 65	Dy 66	Ho 67	Er 68	Tm 69	Yb 70	Lu 71							
		Ac 89	Th 90	Pa 91	U 92	Np 93	Pu 94	Am 95	Cm 96	Bk 97	Cf 98	Es 99	Fm 100	Md 101	No 102	Lr 103							

Rysunek:

Tempa reakcji termojądrowych

$\frac{dL_r}{dM_r} = \epsilon(\rho, T, \mathbf{X})$ - równanie na zmianę jasności w zależności od zmiennej masowej.

$\epsilon(\rho, T, \mathbf{X})$ - moc wydzielana na jednostkę masy

$r_{j,k}$ - liczba reakcji jąder j i jąder k w 1 cm^3 na 1 s

$\lambda_{j,k}$ - liczba reakcji na jedną cząstkę

$$r_{j,k} = \lambda_{j,k} N_j N_k$$

$$r_{j,k} = \sigma_{j,k} v N_j N_k$$

$$N_j = \frac{\rho X_j}{A_j m}$$

Nadwyżka masy

$$\Delta m_j = (m_j - A_j m)c^2 = 931.5(m_j/m - A_j)MeV \quad (2)$$

pierwiastek	A	Δm [Mev]
n	1	8.071
H	1	7.289
H	2	13.136
H	3	14.950
He	4	2.425
Be	8	4.944
C	12	0
O	16	-4.737

Jednostka masy atomowej - 1/12 masy atomu ^{12}C ($931.494 \text{ MeV}/c^2$)

Cykle przemian jądrowych

Przemiany jądrowe zachodzą często w cyklach składających się z ciągu syntez i następujących po nich rozpadów promieniotwórczych powstałego niestabilnego izotopu.

Zwykle o szybkości cyklu reakcji decyduje jedna, najwolniejsza reakcja syntezy, np izotopów a i b . Wtedy

$$\epsilon = \frac{\lambda_{a,b}}{\rho} N_a N_b Q_{eff} = \frac{\lambda_{a,b} X_a X_b}{A_a A_b m^2} Q_{eff}, \quad (3)$$

gdzie Q_{eff} oznacza energię wydzieloną w pojedynczym cyklu pomniejszoną o energię unoszoną przez neutrino Q_ν

$$Q_{eff} = \sum_{j,pocz} \Delta m_j - \sum_{k,kon} \Delta m_k - Q_\nu \quad (4)$$

Zawartości pierwiastków

Zmiana obfitości pierwiastka j dana jest wzorem

$$\frac{dN_j}{dt} = - \left(\tilde{\lambda}_j + \sum_k \lambda_{j,k} N_k \right) N_j + \sum_k \sum_i \lambda_{i,k} N_k N_i \quad (5)$$

$\tilde{\lambda}_j$ - stała rozpadu dla jąder niestabilnych

Jeżeli zmiany zachodzą w tempie znacznie szybszym niż cały cykl, to N_j można wyliczyć jako obfitość równowagową przyjmując

$$\frac{dN_j}{dt} = 0$$

Bariera potencjału

Reakcja syntezy jąder wymaga zbliżenia ich na odległość d_N odpowiadającą zasięgowi sił jądrowych, która jest porównywalna z rozmiarem jądra.

Odległości jądrowe mierzy się w femtometrach (fermich)

$$1\text{ fm} = 10^{-15}\text{ m} = 10^{-13}\text{ cm}$$

Przybliżona ocena zasięgu sił jądrowych

$$d_N \approx 1.4(A_j^{1/3} + A_k^{1/3})\text{ fm}$$

Bariera potencjału sił elektrostatycznego odpychania wynosi

$$E_C = \frac{e^2 Z_j Z_k}{d_n} = 1.44 \frac{Z_j Z_k}{(d_N/\text{fm})} \text{ MeV} \quad (6)$$

Dla reakcji $p + p$ mamy $E_C \approx 0.5\text{ MeV}$.

Średnia energia cząsteczek gazu dana jest przez

$$\bar{E} = kT = 8.6 \cdot 10^{-4} (T/10^7 \text{ K}) \text{ MeV}$$

Bariera potencjału

W centrum Słońca

$$\frac{E_C}{\bar{E}} = 370$$

Jaki ułamek wszystkich cząstek stanowią cząstki o energiach $E \geq E_C$? Korzystając z rozkładu Maxwella

$$dn(p) = \frac{n}{(2\pi m_j kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_j kT}\right) 4\pi p^2 dp \quad (7)$$

$$\frac{N_C}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x_C}^{\infty} \exp(-x) \sqrt{x} dx, \quad (8)$$

gdzie $x = E/\bar{E}$.

Całkujemy przez części i korzystamy z $x_C \gg 1$, przez co uwzględniamy tylko człon brzegowy i otrzymujemy

$$\frac{N_C}{N} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x_C) \sqrt{x_C} = 4 \cdot 10^{-160}$$

Liczba protonów tworzących Słońce jest mniejsza niż 10^{57} . Bez efektu tunelowego reakcje termojądrowe nie mogłyby zachodzić.

Czynnik ekranowania

Elektrony otaczające jądra redukują barierę potencjału, co prowadzi do efektywnego zwiększenia prawdopodobieństwa reakcji o *czynnik ekranowania* S_F . Efekt znaczący w gęstej plazmie (możliwość “zimnej fuzji”).

W warunkach astrofizycznych zazwyczaj wystarcza przybliżenie słabego ekranowania. Opisujemy potencjał elektrostatyczny ekranowanego jądra korzystając ze wzoru:

$$\Phi(r) = \frac{Ze}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right), \quad (9)$$

gdzie

$$r_D = \sqrt{\frac{mkT}{4\pi e^2 \rho \zeta}} \quad \text{gdzie} \quad \zeta = \sum_j \frac{Z_j(Z_j+1)}{A_j} X_j$$

nosi nazwę promienia Debaye'a.

Czynnik ekranowania c.d.

W tym przybliżeniu czynnik ekranowania wynosi

$$S_f = \exp\left(-\frac{d_N}{r_D}\right) \approx 1 - \frac{d_N}{r_D} \quad (10)$$

Liczbowo

$$r_D = 3 \cdot 10^{-9} \sqrt{\frac{T_7}{\zeta \rho_2}} \text{ cm}$$

Ekranowanie w przypadku Słońca ma niewielkie znaczenie. Jego rola jest tym większa im mniejsza jest masa gwiazdy

Przekrój czynny na reakcje jądrowe

Przekrój czynny na zachodzenie reakcji jądrowych można zapisać jeżeli v - będzie prędkością względną jądra j względem jądra k a $\psi(v)$ rozkładem prędkości względnych

$$r_{j,k} = N_j N_k \int_0^\infty \sigma_{j,k} \psi(v) v dv = N_j N_k \langle \sigma_{j,k} v \rangle = \lambda_{j,k} N_j N_k \quad (11)$$

Jeżeli prędkości jąder j i k opisane będą rozkładem Maxwella-Boltzmann'a, to rozkład prędkości względnych będzie również takim rozkładem, ale dla cząstek o masie zredukowanej

$$m_{red} = \frac{m_j m_k}{m_j + m_k}$$

Możemy wtedy zapisać

$$\psi(v) v dv = \left(\frac{2}{kT} \right)^{3/2} \left(\frac{1}{\pi m_{red}} \right)^{1/2} E \exp \left(-\frac{E}{kT} \right) dE \quad (12)$$

Przekrój czynny na reakcje jądrowe - czas życia jądra

Dla identycznych jąder, $N_j N_k$ należy zastąpić w równaniu (11) przez $\frac{1}{2} N_j^2$

Czas życia jądra k ze względu na reakcję z cząstką j dany jest przez

$$\tau_{j,k} = \frac{N_j}{r_{j,k}}$$

Jeżeli trzeba wziąć pod uwagę wiele reakcji, to czas życia jądra k dany jest wzorem

$$\tau_k = \left(\sum_j \frac{1}{\tau_{j,k}} \right)^{-1}$$

Przekrój czynny na reakcje jądrowe - efekt tunelowania

Przekrój czynny zawiera efekt tunelowania, który w przybliżeniu JWKB, stosowanym, gdy $E \ll E_C$ i przy zaniedbaniu ekranowania dany jest przez

$$P_C = \exp\left(-\frac{b}{\sqrt{E}}\right) \quad (13)$$

gdzie

$$b = 2\pi^2(2m_{red})^{1/2} \frac{Z_j Z_k e^2}{h} = 0.98 Z_j Z_k \sqrt{\frac{m_{red}}{m}} \text{MeV}^{1/2} \quad (14)$$

Przekrój czynny na reakcje jądrowe c.d.

Doświadczalne przekroje czynne dla reakcji jądrowych najczęściej wyznaczane są dla energii dużo wyższych niż we wnętrzach gwiazd. Czy ekstrapolacja danych doświadczalnych jest dobra, w dużej mierze zależy od tego, czy w wyniku fuzji istnieją w nowopowstałym jądrze rezonanse. Jeżeli energie są odległe od rezonansowych, to możemy przyjąć, że

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} P_C \quad (15)$$

gdzie S jest wolno zmienną funkcją energii.

Dla wszystkich ważnych w astrofizyce reakcji jądrowych wartości $S_0 = S(E_0)$ i pochodnych w rozwinięciu na szereg Taylora wokół wybranego $E = E_0$ są stabilizowane. W uproszczonych formułach można dalsze wyrazy tego szeregu pominać.

Przekrój czynny na reakcje jądrowe c.d.

Wzór na tempo reakcji termojądrowych możemy zapisać w postaci

$$\lambda_{j,k} = \langle \sigma_{j,k} v \rangle = \left(\frac{2}{kT} \right)^{3/2} \left(\frac{1}{\pi m_{red}} \right)^{1/2} S_0 \int_0^\infty \exp F(E) dE \quad (16)$$

gdzie

$$F = - \left(\frac{E}{kT} + \frac{b}{\sqrt{E}} \right)$$

Funkcja $F(E)$ osiąga maksimum dla energii

$$E = E_G = (0.5kTb)^{2/3} \quad (17)$$

nazywanej *szczytem Gamowa*.

Całkę wylicza się kładąc w przybliżeniu

$$F = F_G + \frac{1}{2}F_G''(E - E_G)^2$$

z

$$F_G = -3\frac{E_G}{kT}$$

$$F_G'' \equiv \left(\frac{d^2 F}{dE^2} \right)_{E=E_G} = -\frac{3}{4}bE_G^{-5/2} = -\frac{3}{2} \left(\frac{b}{2} \right)^{-2/3} (kT)^{-5/3}$$

co jest uzasadnione przez szybkie malenie funkcji podcałkowej przy oddalaniu się od jej maksimum w E_G . W tym przybliżeniu całkę wyliczamy w granicach $(E - E_G)$ od $-\infty$ do ∞

$$\int_0^\infty e^F dE \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-F_G''}} e^{F_G} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} (0.5b)^{1/3} (kT)^{5/6} \exp \left[-3 \left(\frac{b}{2} \right)^{2/3} (kT)^{-1/3} \right] \quad (18)$$

Ostatecznie mamy

$$\lambda_{j,k} \sim T^{-2/3} \exp \left(-\frac{f}{T_7^{1/3}} \right), \quad (19)$$

gdzie

$$f = 1.5b^{2/3} \left(\frac{k}{2} 10^7 K \right)^{-1/3} = 19.72(Z_j Z_k)^{2/3} \left(\frac{m}{m_{red}} \right)^{1/3}$$

Ta forma zależności szybkości reakcji od temperatury jest charakterystyczna dla reakcji nierezonansowych. Jeżeli reakcja $j+k$ jest reakcją (wolną), która determinuje szybkość cyklu, to wykładnik temperaturowy dla produkcji energii jest dany przez

$$\epsilon_T = \frac{\partial \ln \epsilon}{\partial \ln T} \approx \frac{f}{3T_7^{1/3}} - \frac{2}{3} \quad (20)$$

Im wyższy ładunek elektryczny jąder tym wyższy wykładnik i tym większa koncentracja produkcji energii w pobliżu centrum gwiazdy

Reakcje rezonansowe

W okolicy rezonansu wyrażenie na przekrój czynny ma postać

$$\sigma \sim P_C F_r$$

gdzie

$$F_r = [(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2]^{-1}$$

i

$$\Gamma = \frac{h}{2\pi\tau} \ll E_r$$

Jeżeli rezonans występuje przy niskich energiach, to często dominujący wkład do całki w wyrażeniu na $r_{j,k}$ pochodzi z okolicy $E = E_r$ i we wszystkich pozostałych funkcjach E (oprócz F_r) można tę równość założyć.

$$\int_0^\infty F_r dE = \frac{2\pi}{\Gamma}$$

Reakcje rezonansowe c.d.

W związku z tym dostajemy

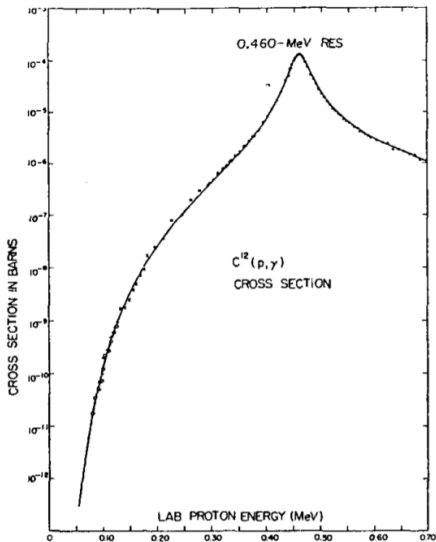
$$\lambda_{j,k} \sim T_7^{-3/2} \exp\left(\frac{-1161E_r}{T_7}\right) \quad (21)$$

Gdzie E_r wyrażone jest w MeV.

Jeżeli reakcja rezonansowa wyznacza tempo cyklu, to wykładnik temperaturowy dany jest przez

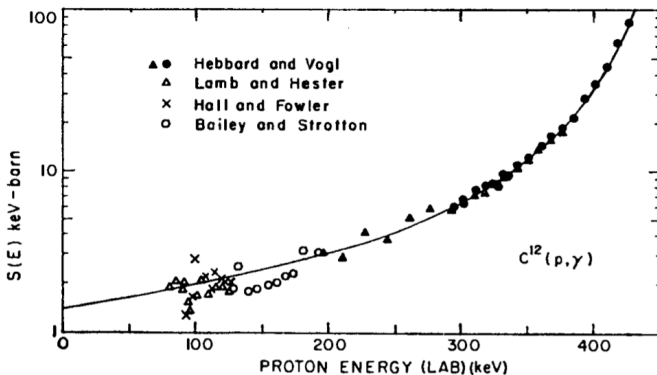
$$E_T \approx \frac{1161E_r}{T_7} - \frac{3}{2} \quad (22)$$

Dane doświadczalne



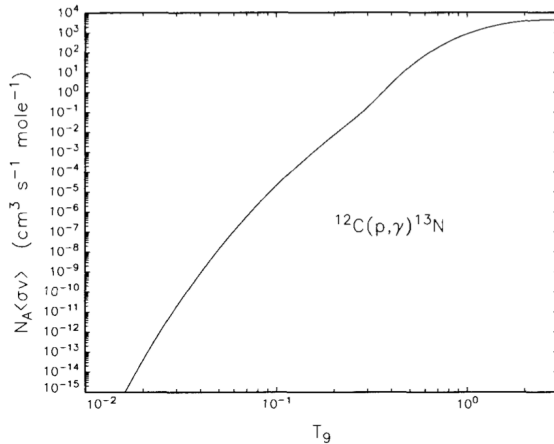
Rysunek: Rysunek 6.4 z C.J. Hansen, S.D. Kawaler, V. Trimble *Stellar Interiors*

Przebieg funkcji S



Rysunek: Rysunek 6.5 z C.J. Hansen, S.D. Kawaler, V. Trimble *Stellar Interiors*

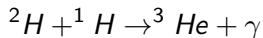
Tempo zachodzenia reakcji $^{12}\text{C} + ^1\text{H} \rightarrow ^{13}\text{N}$



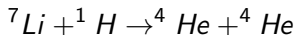
Rysunek: Rysunek 6.6 z C.J. Hansen, S.D. Kawaler, V. Trimble *Stellar Interiors*

Reakcje jądrowe przed ciągiem głównym i w brązowych karłach

Fuzja deuteru zachodzi już w temperaturach 10^6 K. Może zachodzić w obiektach o masie $M \geq 13M_J$



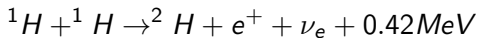
Fuzja litu zaczyna być istotna w temperaturze ok. $3 \cdot 10^6$ K. Taka temperatura osiągana jest we wnętrzach obiektów o $M \geq 60M_J$



Dla obiektów o masie większej niż $\approx 80M_J$ ($0.08M_\odot$) zaczyna się synteza wodoru

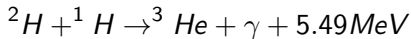
Reakcje jądrowe ma MS - cykl P-P

- ▶ Synteza dwóch protonów (pa)



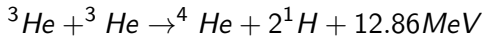
Odbywa się ona w dwóch etapach: - utworzenie jądra 2He - rozpad beta plus tworzący deuter 2H (zachodzi on bardzo rzadko - oddziaływanie słabe, najczęściej 2He rozpada się na dwa protony) Dzięki emisji pozytronu mamy dodatkowy zysk energii z anihilacji par e^-e^+ (1.02 MeV).

- ▶ Synteza deuteru w hel 3 (pb)



Zachodzi bardzo szybko (średni czas życia deuteru we wnętrzu Słońca to ok. 4 min)

- ▶ Synteza 3He w 4He (pc)

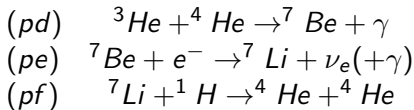


Średni czas życia 3He we wnętrzu Słońca to ok. 400 lat

Reakcje jądrowe ma MS - cykl P-P

Reakcje termojądrowe (pa, pb, pc) nazywane są cyklem PP-I. Powstaje w nim większość energii Słońca (ok 85%, z tego w samym wnętrzu ok. 69%). Całkowity zysk energetyczny wynosi 26.73 MeV na jedno wyprodukowane jądro ${}^4\text{He}$, neutrina unoszą 2% energii cyklu

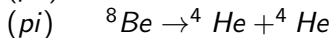
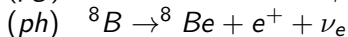
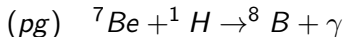
Cykl PP-II



Cykl PP-II odpowiada za ok 14% energii Słońca. Głównym źródłem energii jest synteza litu z wodorem (daje 17.37 MeV). Neutrina unoszą 4% energii cyklu (energia ν_e powstającego w reakcji (pe) to w 90% 0.861 MeV, a w 10% 0.383 MeV).

Reakcje jądrowe ma MS - cykl P-P

Cykl PP-III



Ta gałąź cyklu P-P odpowiada tylko za 0.1% jego jasności, stanowi jednak źródło wysokoenergetycznych neutrin z energią do 14 MeV, a całkowita strata energii w wyniku emisji neutrin wynosi w tym cyklu 28%.

Cykl P-P

Tempo reakcji cyklu wyznaczone jest przez reakcję (pa)

$$r_{p-p} = r_{pa} \approx 2.48 \cdot 10^{12} \frac{X^2 \rho_2^2}{T_7^{2/3}} \exp \left(\frac{-15.7}{T_7^{1/3}} \right) \text{cm}^{-3} \text{s}^{-1} \quad (23)$$

Tempo produkcji energii na 1 g

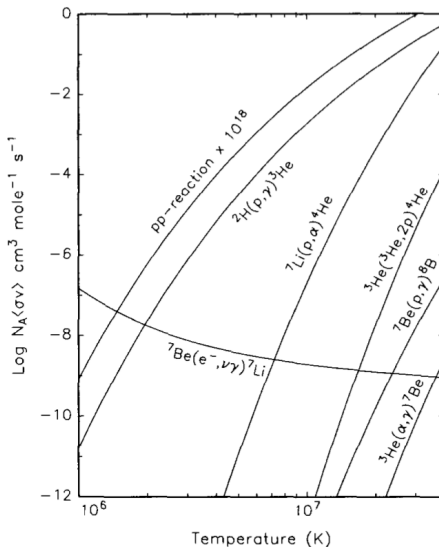
$$\epsilon_{p-p} = \frac{Q_{p-p, \text{eff}} r_{p-p}}{\rho} \approx 5.2 \cdot 10^6 \frac{X^2 \rho_2^2}{T_7^{2/3}} \exp \left(\frac{-15.7}{T_7^{1/3}} \right) \text{erg/g/s} \quad (24)$$

Wykładnik temperaturowy dla cyklu p-p

$$\epsilon_T = \frac{5.2}{T_7^{1/3}} - \frac{2}{3}$$

Dla centrum Słońca $\epsilon_T \approx 3.9$

Tempo zachodzenia reakcji w cyklu PP

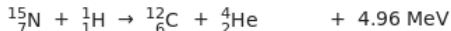
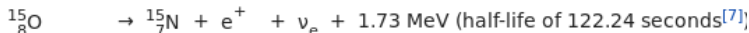
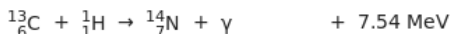
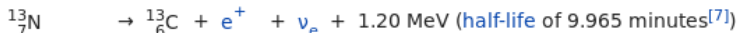


Rysunek: Rysunek 6.9 z C.J. Hansen, S.D. Kawaler, V. Trimble *Stellar Interiors*

Reakcje jądrowe ma MS - cykl CNO

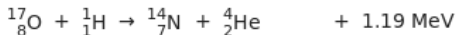
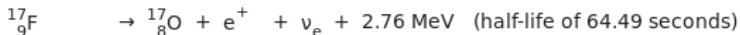
Cykl CNO zachodzi w obecności cięższych pierwiastków i jest dominujący dla gwiazd MS o masach powyżej ok. $1.5 M_{\odot}$ (w zależności od metaliczności). Na Słońcu odpowiada on za produkcję ok 1.5 % energii

Cykl CNO-I



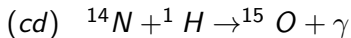
Reakcje jądrowe ma MS - cykl CNO

Cykl CNO-II



Reakcje jądrowe ma MS - cykl CNO

Reakcje cyklu CNO są nierezonansowe. Reakcją określającą tempo reakcji cyklu jest



Tempo produkcji energii na 1 g, przy założeniu, że połowa zawartości metali Z przypada na C N O w przybliżeniu wynosi

$$\epsilon_{CNO} = \frac{Q_{CNO,eff} r_{CNO}}{\rho} \approx 9.5 \cdot 10^{27} \frac{XZ\rho_2}{T_7^{2/3}} \exp\left(\frac{-70.5}{T_7^{1/3}}\right) \text{erg/g/s} \quad (25)$$

Wykładnik temperaturowy dla cyklu CNO

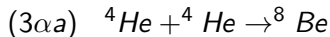
$$\epsilon_T = \frac{23.5}{T_7^{1/3}} - \frac{2}{3}$$

Dla centrum Słońca $\epsilon_T \approx 19.6$, a dla centrum gwiazdy ZAMS o masie $5M_\odot$ $\epsilon_T \approx 16.2$

Ze względu na tempo reakcji (cd) prawie cały CNO w obszarze zachodzenia reakcji zamieniony jest na ${}^{14}\text{N}$, a stosunek zawartości ${}^{12}\text{C}/{}^{13}\text{C} \approx 3.5$

Reakcje poza MS - cykl 3 α

Syntezę jądrową w helowym jądrze inicjuje reakcja



Jest to reakcja odwrotna do reakcji kończącej gałąź PPIII cyklu p-p i potrzebna jest do jej zajścia energia 91.8 keV. Jądra ${}^8\text{Be}$ rozpadają się w czasie $2.6 \cdot 10^{-16}$ s na dwa jądra ${}^4\text{He}$. Można oszacować liczbę jąder ${}^8\text{Be}$ korzystając z odpowiednika równania Sahy, gdy potraktujemy rozpad jako jonizację z ujemną energią, a za masę elektronu podstawimy masę cząstki α .

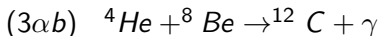
$$N({}^8\text{Be}) = 1.87 \cdot 10^{-33} T_8^{-3/2} N_{\text{He}}^2 \exp\left(-\frac{10.65}{T_8}\right) \text{cm}^{-3} \quad (26)$$

Dla gwiazdy o masie $1 M_{\odot}$ efektywna synteza węgla zaczyna się przy $T_8 \approx 1.1$ i $\rho_6 \approx 1$, co odpowiada $N_{\text{He}} \approx 1.5 \cdot 10^{29}$. Wtedy

$$N({}^8\text{Be}) = 1.75 \cdot 10^{-8} N_{\text{He}}$$

Cykl 3α

Nawet tak mała liczba jąder ${}^8\text{Be}$ jest wystarczająca do efektywnego zachodzenia reakcji rezonansowej



Reakcje $((3\alpha a)$ i $(3\alpha b)$ tworzą cykl 3α w którym

$$Q_{\text{eff}} = 7.367 - 0.0918 = 7.275 \text{ MeV}$$

Tempo cyklu wyznacza rezonansowa reakcja $(3\alpha b)$ z $E_r = 0.287 \text{ MeV}$

$$\epsilon_{3\alpha} \approx 5 \cdot 10^{29} \frac{\rho_6^2 Y^3}{T_8^3} \exp\left(-\frac{43.97}{T_8}\right) \text{ erg/g/s} \quad (27)$$

Wykładnik temperaturowy wynosi w związku z tym

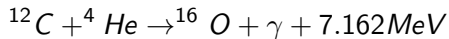
$$\epsilon_T = \frac{43.97}{T_8} - 3$$

$\epsilon_T \approx 37$ dla gwiazd o masie $1M_\odot$, $\epsilon_T \approx 31$ dla gwiazd o masie $5M_\odot$.

Cykl 3α i spalanie węgla

Początek spalania helu w jądrach gwiazd o masie mniejszej niż ok. $2.3 M_{\odot}$ ma charakter eksplozywny (błysk helowy) ze względu na degenerację.

Kolejną istotną reakcją w helowych jądrach jest



Wyliczenie tempa tej reakcji stanowi poważny problem dla fizyki jądrowej. Ewolucję ilości atomów He (N_4), C (N_{12}) i O (N_{16}) w jednostce objętości opisują równania

$$\frac{dN_4}{dt} = -3\lambda_{3\alpha}N_4^3 - \lambda_{\alpha,12}N_4N_{12}$$

$$\frac{dN_{12}}{dt} = \lambda_{3\alpha}N_4^3 - \lambda_{\alpha,12}N_4N_{12}$$

$$\frac{dN_{16}}{dt} = \lambda_{\alpha,12}N_4N_{12}$$

Cykl 3α i spalanie węgla

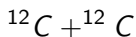
Po zakończeniu palenia helu w jądrze gwiazdy najobfitszymi pierwiastkami są węgiel i tlen. Ich względna obfitość zależy od (niepewnej) wartości $\lambda_{\alpha,12}$

W czasie działania cyklu 3α produkowana jest również pewna ilość neonu w reakcji



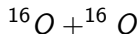
Reakcje po wypaleniu helu

- ▶ W temperaturze $T_8 > 5$ zaczyna być istotna reakcja.



Powstaje wzbudzone jądro magnezu, które ma kilka kanałów rozpadu (^{20}Ne , ^{23}Na , ^{23}Mg , ^{24}Mg). Całkowita przemiana $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ w ^{24}Mg daje $Q=13.933$ MeV

- ▶ W temperaturze $T_9 > 1$ zaczyna się palenie helu w reakcji



Jej głównymi produktami są krzem ^{28}Si i siarka ^{32}S .
Całkowita przemiana $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ w ^{32}S daje $Q=16.542$ MeV

- ▶ W temperaturze $T_9 \approx 3$ zaczyna się spalanie Si prowadzące do powstania żelaznego jądra.

Ostatnie fazy ewolucji

- ▶ Proces palenia węgla w konwektywnych jądrach trwa ok. 100 lat.
- ▶ Kolejne fazy ewolucji: synteza Si i cięższych jąder aż do Fe zachodzą w skali miesięcy i dni.
- ▶ Kreacja par elektron - pozyton, emisja neutrin,
- ▶ Fotodezintegracja jąder żelaza, wychwyt elektronów.
- ▶ Zapadnięcie żelaznego jądra (wybuch SN Ib/c, SN II)

Równania w zależności od promienia

- ▶ Równanie ciągłości

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (28)$$

- ▶ Równanie równowagi hydrostatycznej

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho \quad (29)$$

- ▶ Równanie na tempo produkcji energii

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad (30)$$

- ▶ Gradient temperatury

$$\frac{dT}{dr} = \frac{d \ln T}{d \ln P} \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} = \nabla \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad (31)$$

Równania w zależności od masy

- ▶ Równanie ciągłości

$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (32)$$

- ▶ Równanie równowagi hydrostatycznej

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \quad (33)$$

- ▶ Równanie na tempo produkcji energii

$$\frac{dL_r}{dM_r} = \epsilon \quad (34)$$

- ▶ Gradient temperatury

$$\frac{dT}{dM_r} = \frac{d \ln T}{d \ln P} \frac{T}{P} \frac{dP}{dM_r} = \nabla \frac{T}{P} \frac{dP}{dM_r} \quad (35)$$

- ▶ Przypadek promienisty i konwektywny

$$\nabla = \begin{cases} \nabla_{rad} = \frac{3\kappa L_r P}{16\pi G a c M_r T^4} & dla \quad \nabla_{rad} \leq \nabla_{ad} \\ \nabla_{ad} + \nabla_n & dla \quad \nabla_{rad} > \nabla_{ad} \end{cases} \quad (36)$$

- ▶ Wartość ∇_n możemy wyznaczyć z równania wynikającego z MLT
- ▶ W głębokich wnętrzach gwiazd możemy przyjąć, że $\nabla_n = 0$.

Dane materiałowe.

- ▶ Równania budowy wewnętrznej dla sferycznie symetrycznych gwiazd muszą być uzupełnione przez dane fizyczne (najczęściej tablicowane) takie jak:

$$P = P(\rho, T, \mathbf{X})$$

$$u = u(\rho, T, \mathbf{X})$$

$$\kappa = \kappa(\rho, T, \mathbf{X})$$

$$\epsilon = \epsilon(\rho, T, \mathbf{X})$$

i ich potrzebne pochodne

- ▶ Dodatkowo dla modelu wyjściowego musimy podać $\mathbf{X}(M_r)$.
- ▶ Najczęściej przyjmuje się, że modele gwiazd ciągu głównego wieku zerowego (ZAMS) są jednorodne chemicznie ze względu na całkowicie konwektywne modele przed osiągnięciem ZAMS (faza Hayashiego)

Warunki brzegowe

- ▶ Warunki brzegowe są określone zarówno we wnętrzu, jak i na powierzchni (są dwupunktowe)

$$r(M_r = 0) = 0 \quad L_r(M_r = 0) = 0$$

$$\rho(M_r = M) = 0 \quad T(M_r = M) = 0$$

- ▶ Zamiast zerowego warunku na temperaturę można podać warunek wynikający z przybliżenia Eddingtona

$$T(M_r = M) = (1/2)^{1/4} T_{ef} = \left(\frac{L}{8\pi\sigma R^2} \right)^{1/4}$$

- ▶ Zaawansowany górny warunek brzegowy będzie związany z rozwiązaniem równań transferu i równowagi hydrostatycznej dla atmosfery, które należy uzyskać do głębokości na której pole promieniowania jest już praktycznie takie, jak wynika z przybliżenia dyfuzyjnego.

Modele homologiczne jednorodnie chemicznie

Zanim omówimy rozwiązanie równań budowy wewnętrznej otrzymamy przybliżone zależności dla gwiazd jednorodnych chemicznie znajdujących się w równowadze hydrostatycznej i termicznej.

Skorzystamy z modeli samopodobnych (homologicznych) dla których przebieg wartości

$$\frac{r}{R} \left(\frac{M_r}{M} \right), \frac{\rho}{\rho_c} \left(\frac{M_r}{M} \right), \frac{L_r}{L} \left(\frac{M_r}{M} \right), \frac{T}{T_c} \left(\frac{M_r}{M} \right),$$

jest taki sam.

Przyjmujemy następujące założenia: równanie stanu gazu doskonałego

$$P \sim \frac{\rho T}{\mu}$$

potęgowa zależność od gęstości i temperatury dla współczynnika nieprzezroczystości i tempa produkcji energii

$$\kappa = \kappa_0 \rho^q T^{-s} \quad \epsilon = \epsilon_0 \rho T^b$$

Modele homologiczne c.d.

Dla modeli homologicznych mamy następujące relacje

$$\rho_c \sim \frac{M}{R^3}$$

$$T_c \sim \frac{\mu M}{R} \sim \mu M^{2/3} \rho_c^{1/3}$$

$$P_c \sim \frac{M^2}{R^4} \sim M^{2/3} \rho_c^{4/3}$$

$$\nabla_{rad} \sim \frac{L_r}{M_r} \frac{\kappa P}{T^4} \sim \frac{L_r}{M_r} \frac{\kappa_0 \rho^{q+1}}{T^{s+3}}$$

czyli dla modeli homologicznych

$$\frac{L}{M} \sim \frac{\mu}{\kappa_0} \frac{T_c^{s+3}}{\rho_c^{q+1}}$$

Dla tempa produkcji energii

$$\frac{L}{M} \sim \epsilon_0 \rho_c T_c^b$$

Modele homologiczne c.d.

Możemy zapisać zależność gęstości centralnej od temperatury

$$\rho_c \sim \left(\frac{\mu}{\kappa_0 \epsilon_0} \right)^{1/(q+2)} T_c^{(s-b+3)/(q+2)}$$

dla prawa Kramersa mamy $\kappa_0 \sim \rho T^{-3.5}$ Z zależności

$$\rho_c \sim \mu^{-3} T_c^3 M^{-2}$$

dostajemy zależność T_c od masy o składu chemicznego gwiazdy

$$T_c \sim M^{(2q+4)/d} \mu^{(3q+7)/d} (\kappa_0 \epsilon_0)^{-1/d}$$

gdzie $d \equiv b - s + 3 + 3q$

Z powyższych wzorów można otrzymać zależność jasności od masy i składu chemicznego

$$L \sim M^{w_M} \mu^{w_\mu} \epsilon_0^{1+w_k} \kappa_0^{w_k}$$

Modele homologiczne

$$L \sim M^{w_M} \mu^{w_\mu} \epsilon_0^{1+w_k} \kappa_0^{w_k}$$

gdzie:

$$w_M = 1 + \frac{2}{d} (b(q+1) + s + 3)$$

$$w_\mu = \frac{1}{q+2} \left(1 + (2q+7) \frac{b(q+1) + s + 3}{d} \right)$$

$$w_k = -\frac{1}{q+2} \left(1 + \frac{b(q+1) + s + 3}{d} \right)$$

Stosunkowo najczęściej będzie wykorzystywana zależność $L(M)$.
Dla cyklu p-p ($b=4$) i prawa Kramersa ($q = 1, s=3.5$)

$$L \sim M^{5.46}$$

Dla cyklu CNO ($b=16$) i prawa Kramersa ($q = 1, s=3.5$)

$$L \sim M^{5.14}$$

Jeżeli $q=0$ i $s = 0$, to

$$L \sim M^3$$

Modele homologiczne c.d.

Zależność od średniego ciężaru cząsteczkowego w przypadku $s=0$,
 $q=0$

$$L \sim \mu^4$$

Rozwiązanie równań

Cztery równania budowy wewnętrznej rozwiązuje się metodą iteracji ze zszywaniem w punkcie pośrednim $M_r = M_{fit}$.

Potrzebna jest znajomość przybliżonych wartości ρ_c T_c (w $M_r = 0$) i L i R (lub T_{ef}) w $M_r = M$.

Rozwiązanie od centrum zaczyna się od skończonej, ale dostatecznie małej wartości M_r . Możemy wtedy położyć $\rho = \rho_c$ i

$$r = \left(\frac{3M_r}{4\pi\rho_c} \right)^{1/3}$$

z równania

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2}$$

wynika przy $r \rightarrow 0$

$$\left(\frac{d^2P}{dr^2} \right)_c = -\frac{4\pi}{3} G \rho_c^2$$

Rozwiązanie równań budowy wewnętrznej

Podstawiając do rozwinięcia na P wokół $r=0$

$$P = P_c - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 P}{dr^2} \right)_c r^2 = P_c - \frac{G}{2} M_r^{2/3} \left(\frac{4}{3} \pi \rho_c^4 \right)^{1/3}$$

$$T = T_c - \frac{T_c}{P_c} \text{Min}(\nabla_{rad,c}, \nabla_{ad,c}) \frac{G}{2} M_r^{2/3} \left(\frac{4}{3} \pi \rho_c^4 \right)^{1/3},$$

gdzie

$$\nabla_{rad,c} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{P_c \kappa_c \epsilon_c}{T_c^4}$$

W głębokim wnętrzu zaniedbujemy ∇_n

Z powodów numerycznych nie dochodzi się do powierzchni gwiazdy, ale kontynuuje się wyliczanie zmiennych do wybranej wartości $M_r = M_{fit}$

Rozwiązanie równań budowy wewnętrznej

Oznaczmy wartości czterech wybranych zmiennych zależnych w punkcie zszycia przez $y_{j,c}$ ($j=1,2,3,4$), ich wartości są funkcjami $\rho_c = x_1$ i $T_c = x_2$.

Całkowanie od powierzchni wewnątrz wykonujemy dla próbnych wartości $L = x_3$ i $T(M) = (\frac{1}{2})^{1/4} T_{ef} = x_4$. Musimy jeszcze przyjąć wartość małą wartość na $\rho(M)$ na przykład 10^{-12} i możemy rozpocząć całkowanie wewnątrz do $M_r = M_{fit}$. Wartości zmiennych zależnych w tym punkcie oznaczamy $y_{j,e}$. Zazwyczaj

$$d_j = y_{j,e} - y_{j,c} \neq 0$$

Wartości x_k zmieniamy tak długo, aż osiągniemy dopasowanie z założoną dokładnością ($\text{Max}|d_j/y_j|$ mniejsze od ustalonej liczby).

Rozwiązanie równań budowy wewnętrznej

Poprawki Δx_k można wyznaczyć n.p. metodą iteracji zakładając przybliżenie liniowe na każdym kroku. Wartości Δx_k dostajemy jako rozwiązania równań

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial y_{j,c}}{\partial x_k} - \sum_{j=3}^4 \frac{\partial y_{j,e}}{\partial x_k} = d_j \quad (37)$$

Pochodne cząstkowe wyliczamy numerycznie.

Wyznaczone poprawki dodaje się do x_k i proces powtarza się aż do uzyskania wymaganej dokładności zszycia.

Niestabilność cieplna

Równanie (37) nie ma rozwiązań jeżeli wyznacznik macierzy

$$\mathcal{M}_{jk} \equiv \frac{\partial y_{j,c}}{\partial x_k} - \frac{\partial y_{j,e}}{\partial x_k} = 0$$

Wiąże się to z neutralną stabilnością względem zaburzeń cieplnych. Zapiszmy pierwsze prawo termodynamiki w postaci:

$$T \frac{dS}{dt} = \frac{du}{dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \epsilon - \frac{dL_r}{dM_r} \quad (38)$$

Zakładamy, że zaburzony model jest w stanie równowagi, nie zmienia się skład chemiczny i można równanie zlinearyzować przyjmując zależność czasową w postaci $\exp(\gamma t)$.

Dodatkowo linearyzując zależność $\epsilon(\rho, T)$ otrzymamy

$$\gamma T \delta S = \epsilon \left(\epsilon_T \frac{\delta T}{T} + \epsilon_\rho \frac{\delta \rho}{\rho} \right) - \frac{d\delta L_r}{dM_r} \quad (39)$$

Niestabilność cieplna c.d.

- ▶ Jako podstawowych zmiennych termodynamicznych użyjemy S i P .

$$\frac{\delta T}{T} = \nabla_{ad} \frac{\delta P}{P} + \frac{\delta S}{c_P} \quad (40)$$

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\delta P}{P} - \frac{\chi_T}{\chi_\rho} \frac{\delta S}{c_P} \quad (41)$$

- ▶ W obszarach o wydajnej konwekcji mamy

$$\frac{d\delta S}{dM_r} = 0 \quad (42)$$

- ▶ Możemy przyjąć, że obszary o niewydajnej konwekcji, leżące blisko powierzchni gwiazdy pozostają w równowadze cieplnej.
- ▶ Dla obszarów promienistych najwygodniej będzie nam skorzystać ze związku

$$\frac{d \ln T}{dM_r} \sim \frac{L_r \kappa}{(rT)^4} \quad (43)$$

Niestabilność cieplna c.d.

- ▶ Linearyzacja równania (43) daje nam związek

$$\frac{d}{dM_r} \left(\frac{\delta T}{T} \right) = \nabla_{rad} \frac{d \ln P}{dM_r} \left[\frac{\delta L_r}{L_r} + (\kappa_T - 4) \frac{\delta T}{T} + \kappa_\rho \frac{\delta \rho}{\rho} - 4 \frac{\delta r}{r} \right] \quad (44)$$

- ▶ Zaburzenie może nam zmieniać granicę obszaru konwektywnego. Przesunięcie tej granicy opiszemy wzorem

$$\delta M_c = -\delta D \left(\frac{dD}{dM_r} \right)^{-1},$$

gdzie $D \equiv \nabla_{rad} - \nabla_{ad}$

Niestabilność cieplna c.d.

- Dla obszaru niekonwektywnego możemy zapisać zaburzenie strumienia promienistego

$$\frac{\delta L_r}{L_r} = -\frac{4\pi P r^4}{GM_r \nabla_{rad}} \frac{d}{dM_r} \left(\frac{\delta S}{c_P} + \nabla_{ad} \frac{\delta P}{P} \right) + 4 \frac{\delta r}{r} + b_S \frac{\delta S}{c_P} + b_P \frac{\delta P}{P}, \quad (45)$$

gdzie

$$b_S = 4 - \kappa_T + \kappa_\rho \frac{\chi_T}{\chi_\rho},$$

$$b_P = (4 - \kappa_T) \nabla_{ad} \frac{\kappa_\rho}{\Gamma_1}$$

- Linearyzacja równania ciągłości daje

$$\frac{d\delta r}{dM_r} = - \left(2 \frac{\delta r}{r} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\delta P}{P} - \frac{\chi_T}{\chi_\rho} \frac{\delta S}{c_P} \right) \frac{dr}{dM_r} \quad (46)$$

- Linearyzacja równania równowagi hydrostatycznej daje

$$\frac{d\delta P}{dM_r} = -4 \frac{\delta r}{r} \frac{dP}{dM_r} \quad (47)$$

Niestabilność cieplna c.d.

- Eliminacja δr i δP jest skomplikowana, ale na końcu otrzymujemy równanie na wartość własną γ

$$\gamma T \delta S = \mathcal{N}(\delta S) \quad (48)$$

$\mathcal{N}$ jest operatorem liniowym, różniczkowo-całkowym i na ogół nie jest hermitowski. Wartości własne mogą tworzyć zespolone pary γ i γ^* . Przejście od modeli stabilnych do niestabilnych może zajść w modelu z $\text{Det}(\mathcal{M}_{jk}) \neq 0$

Niestabilność cieplna - model uproszczony

- ▶ Założymy równanie stanu gazu doskonałego, i stałe współczynniki ϵ_T , ϵ_ρ , κ_T , κ_ρ . Rozwiązań równania będziemy szukać w postaci homologicznej z $\delta r/r = \text{const}$
- ▶ Z równania (47) otrzymujemy

$$\frac{\delta P}{P} = -4 \frac{\delta r}{r}$$

- ▶ Z równania (46) otrzymujemy:

$$\frac{dS}{c_P} = 3 \frac{\delta r}{r} + 0.6 \frac{\delta P}{P} = -0.15 \frac{\delta P}{P}$$

- ▶ Z równań (41) i (40) otrzymamy

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = 0.75 \frac{\delta P}{P} \quad i \quad \frac{\delta T}{T} = 0.25 \frac{\delta P}{P}$$

Niestabilność cieplna - model uproszczony

- ▶ Równanie na zaburzenie jasności w obszarze promienistym

$$\frac{\delta L_r}{L_r} = (-0.15b_S + b_P - 1) \frac{\delta P}{P} = -(0.25\kappa_T + 0.75\kappa_\rho) \frac{\delta P}{P}$$

- ▶ Podstawienie do wzoru na pochodną czasową entropii daje

$$[0.6c_P T \gamma + \epsilon(\epsilon_T + \kappa_T + 3\epsilon_\rho + 3\kappa_\rho)] \frac{\delta P}{P} = 0$$

- ▶ Wzór ten nie prowadzi do wartości γ niezależnej od M_r , ale do przybliżonej oceny stabilności możemy skorzystać ze scałkowanej wersji tego warunku, który możemy zapisać w postaci:

$$\bar{\gamma} = -\frac{5(\epsilon_T + \kappa_T) + 15(\epsilon_\rho + \kappa_\rho)}{3\bar{\tau}_{th}}, \quad (49)$$

gdzie

$$\bar{\tau}_{th} = L^{-1} \int c_P T dM_r \sim \tau_{th}$$

Niestabilność cieplna - model uproszczony

- ▶ We wzorze na γ tylko κ_T zazwyczaj jest mniejsze od 0 ale nie na tyle aby dostać $\bar{\gamma} > 0$
- ▶ Zaburzenia ϵ działają stabilizująco w modelu homologicznym ze względu na przeciwne znaki zaburzeń entropii i temperatury. Podobnie jest w gwiazdach zbudowanych z gazu niezdegenerowanego.
- ▶ Dla obszarów w których mamy gaz zdegenerowany w przypadku zaburzeń cieplnych mamy

$$\left| \frac{\delta P}{P} \right| \ll \left| \frac{\delta T}{T} \right|$$

i

$$\frac{\delta S}{c_P} \approx \frac{\delta T}{T}$$

Nie działa ciśnieniowy zawór bezpieczeństwa i reakcje jądrowe zaczynają się w sposób eksplozywny.

Niestabilność cieplna

- ▶ Dla zaburzeń zlokalizowanych w cienkich warstwach z aktywnymi reakcjami jądrowymi nie można znacząco zmienić ciśnienia zmieniając rozkład masy w tej warstwie. Taka niestabilność może występować w warstwie palenia helu nad zdegenerowanym jądrem węglowo - tlenowym i w jej wyniku otrzymujemy pulsy cieplne

Ewolucja zachodzi przy braku równowagi cieplnej również gdy brak jest dostatecznie wydajnych jądrowych źródeł energii.

- ▶ Kontrakcja w cieplnej skali czasu przed ciągiem głównym, temperatura zbyt niska dla syntezy wodoru.
- ▶ Po opuszczeniu ciągu głównego w jądrze helowym nie ma reakcji termojądrowych i staje się ono izotermiczne, jeżeli jego względna masa przekroczy krytyczną wartość, to następuje jego kurczenie się w cieplnej skali czasu. Prowadzi ono do degeneracji gazu, albo dla masy przekraczającej ok $2.3 M_{\odot}$ początku syntezy węgla w gazie niezdegenerowanym