Wykład 12 - Białe karły. Rotacja gwiazd

11.01.2018

Odkrycie białych karłów

- W 1783 r Williem Heschel odkrył układ podwójny związany z gwiazdą 40 Eri. Jak się później okazało jeden ze składników tego układu potrójnego (40 Eri B o jasności V=9.52) był pierwszym białym karłem. Jego widmo zostało zbadane dopiero w 1910 r.
- Przewidywanie istnienia masywnych towarzyszy Syriusza i Procjona przez Friedricha Bessela (1844).
- Wyliczenie przewidywanych parametrów orbitalnych (Arthur Auwers dla Procjona)
- Odkrycie Syriusza B w roku 1862 r. - Alvan Graham Clark
- Odkrycie Procjona B w 1896 r. - John Martin Schaeberle
- Analiza widm 40 Eri B (1914) i Syriusza B (1915) - Walter Adams (problem małej jasności przy wysokiej temperaturze)
- Odkrycie pierwszego pojedyńczego białego karła - Adrian van Maanen 1917 - duży ruch własny, typ widmowy F ($T_{ef} \approx 6200$ K, 1920 - paralaksa ok. 0.23", - bardzo mała jasność.

Białe karły - parametry obserwacyjne

Przybliżone parametry białych karłów zostały określone przy okazji analizy ich widm, przy znanych wartościach paralaksy.
Współcześnie podawane parametry dla czterech najbliższych białych karłów są następujące

nazwa	masa ($M_\odot$)	promień ($R_\odot$)	jasność ($L_\odot$)
Syriusz B	1.02	0.0084	0.056
40 Eri B	0.50	0.014	0.013
Procjon B	0.60	0.0123	7740
gwiazda van Maanenena	0.68	0.011	6200

- typy widmowe:
  DA - atmosfera całkowicie wodorowa,
  DB - atmosfera czysto helowa (linie He I)
  DC - widmo ciągłe (brak linii widmowych)
  DO - linie HeII i dodatkowo H i He I
  DZ - linie metali
- Zależność masa - promień
- Zależność wiek - jasność - temperatura

Budowa białych karłów - przybliżenie nierelatywistyczne

- Głównym źródłem ciśnienia we wnętrzach białych karłów są zdegenerowane elektrony
- Często podaje się zależność masa - promień w przypadku nierelatywistycznym ($x_F = \frac{p_F}{m_e c} << 1$)
- Jak pamiętamy w tym przybliżeniu mamy

$$P_e = \int p_x v_x dn(|\mathbf{p}|) = \frac{8\pi}{15 h^3 m_e} p_F^5$$

co przy

$$n_e = \frac{8\pi p_F^3}{3h^3}$$

i

$$\rho = \mu_e m_H n_e \approx \frac{2m_H}{1+X} n_e$$

- Otrzymujemy politropowe równanie stanu ze stałą K=$3.16 \cdot 10^{12}$ dla $X = 0$.

$$P_e = \frac{8\pi h^2}{15 m_e} \left[\frac{3(1+X)}{16\pi m_H}\right]^{5/3} \rho^{5/3} = K\rho^{5/3}$$

Budowa białych karłów - przybliżenie nierelatywistyczne

- Z zależności promień - masa dla kul politropowych

$$R = M^{\frac{1-n}{3-n}} K^{\frac{n}{3-n}} \xi_1 \left[4\pi \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_1 \right]^{\frac{n-1}{3-n}} \left(\frac{n+1}{4\pi G} \right)^{\frac{n}{3-n}}$$

dla $n = 3/2$ ($\xi_1 = 3.654$, $-\xi_1^2 \frac{d\theta}{d\xi}|_1 = 2.714$) otrzymamy

$$R = M^{-1/3} K \xi_1 \left[4\pi \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_1 \right]^{1/3} \left(\frac{n+1}{4\pi G} \right)$$

$$R \approx 8.88 \cdot 10^8 (M/M_\odot)^{-1/3} cm \approx 0.0127 (M/M_\odot)^{-1/3} R_\odot$$

- Musimy jednak pamiętać, że nierelatywistyczne równanie stanu jest właściwe w centralnych częściach tylko najmniej masywnych białych karłów ($M < 0.2 M_\odot$)

Przybliżenie ultrarelatywistyczne - masa Chandrasekhara

- Równanie stanu całkowicie zdegenerowanego gazu elekronów w przybliżeniu ultrarelatywistycznym ($v \to c$ i $pv \to pc$)

  $$P_e = \frac{2\pi c}{3h^3} p_F^4$$

  co przy gęstości opisanej wzorem ( )

  $$P_e = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{8} \left(\frac{1+X}{2m_H}\right)^{4/3} \rho^{4/3} = K_3 \rho^{4/3}$$

  Dla $X = 0$ stała $K_3 = 4.89 \cdot 10^{14}$.
- Dla kuli politropowej o $n = 3$ mamy określoną masę, a $(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi})_1 = 2.018$

  $$M = 4\pi \left(\frac{1}{\pi G}\right)^{3/2} K^{3/2} \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right)_1 = 1.435 \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 M_\odot$$
- Promień konfiguracji ultrarelatywistycznej powinien dążyć do 0 (bo gęstość do nieskończoności)

Budowa białych karłów - model Chandrasekhara

- Dla gazu zdegenerowanego możemy zapisać

$$\rho = \frac{16\pi m_e^3 m_H c^3}{3h^3(1+X)} x_F^3 = C_2 x^3$$

$$P_e = \frac{\pi c^5 m_e^4}{3h^3} \mathcal{I}_1 = C_1 f(x),$$

gdzie

$$\mathcal{I}_1 = 8\int_0^{x_F} \frac{x^4 dx}{\sqrt{1+x^2}} = x_F(2x_F^2 - 3)\sqrt{1+x_F^2} + 3\ln\left(x_F + \sqrt{1+x_F^2}\right)$$

- Korzystamy z równania równowagi hydrostatycznej i równania ciągłości i otrzymujemy odpowiednik równania Lane-Emdena

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho$$

i podstawiając $P(x)$ i $\rho(x)$ otrzymujemy

$$\frac{C_1}{C_2}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{x^3}\frac{df(x)}{dr}\right) = -4\pi G C_2 x^3$$

Budowa białych karłów - model Chandrasekhara c.d.

Po podstawieniu

$$\frac{1}{x^3}\frac{df(x)}{dr} = 8\frac{d}{dr}[(x^2+1)^{1/2}] = 8\frac{dz}{dr}$$

gdzie

$$z^2 = x^2 + 1$$

otrzymamy równanie

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dz}{dr}\right) = -\frac{\pi G C_2^2}{2C_1}(z^2-1)^{3/2},$$

które możemy przekształcić do postaci bezwymiarowej przez podstawienie $\varphi = z/z_c$ i $\zeta = rC_2 z_c\sqrt{\frac{\pi G}{2C_1}}$

$$\frac{1}{\zeta^2}\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^2\frac{d\varphi}{d\zeta}\right) = -\left(\varphi^2 - \frac{1}{z_c^2}\right)^{3/2}$$

Budowa białych karłów - model Chandrasekhara c.d.

- Warunki brzegowe określone są w centrum (dla $r = 0$, czyli $\zeta = 0$)

$$\varphi = 1, \quad \frac{d\varphi}{d\zeta} = 0$$

- Gęstośc określona jest jako

$$\rho = C_2 x^3 = C_2 (z^2 - 1)^{3/2} = C_2 z_c^3 \left(\varphi^2 - \frac{1}{z_c^2} \right)^{3/2}$$

- Powierzchnia jest osiągnięta, dla wartości ζ_1, gdy gęstość osiągnie 0

$$\zeta = \zeta_1 \quad x_1 = 0 \quad z_1 = 1 \quad \varphi_1 = 1/z_c$$

- Promień jest określony jako

$$R = \alpha \zeta_1 = \sqrt{\frac{2C_1}{\pi G}} \frac{1}{C_2 z_c} \zeta_1$$

Budowa białych karłów - model Chandrasekhara c.d.

- Masa białego karła

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr = 4\pi\alpha^3 C_2 z_c^3 \int_0^{\varphi_1} \zeta^2 \left(\varphi^2 - \frac{1}{z_c^2}\right)^{3/2} d\zeta$$

Korzystając z równania różniczkowego

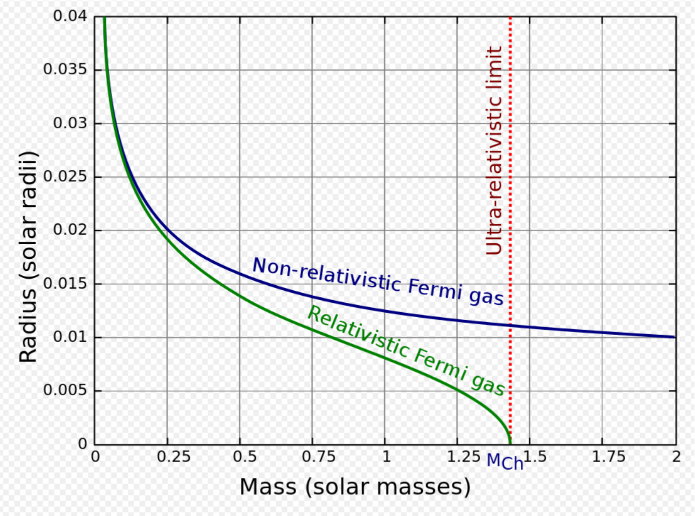
$$M = 4\pi\alpha^3 C_2 z_c^3 \left(-\zeta^2 \frac{d\varphi}{d\zeta}\right)_1 = \frac{4\pi}{C_2^2} \left(\frac{2C_1}{\pi G}\right)^{3/2} \left(-\zeta^2 \frac{d\varphi}{d\zeta}\right)_1$$

Wyniki obliczeń numerycznych dla białych karłów

$1/z_c^2$	x_c	ζ_1	$(-\zeta^2 d\varphi/d\zeta)_1$	ϱ_c/μ_e $(\mathrm{g\,cm^{-3}})$	$\mu_e^2 M$ $(M_\odot)$	$\mu_e R$ (km)
0	∞	6.8968	2.0182	∞	5.84	0
0.01	9.95	5.3571	1.9321	9.48×10^8	5.60	4.170
0.02	7	4.9857	1.8652	3.31×10^8	5.41	5.500
0.05	4.36	4.4601	1.7096	7.98×10^7	4.95	7.760
0.1	3	4.0690	1.5186	2.59×10^7	4.40	10.000
0.2	2	3.7271	1.2430	7.70×10^6	3.60	13.000
0.3	1.53	3.5803	1.0337	3.43×10^6	2.99	16.000
0.5	1	3.5330	0.7070	9.63×10^5	2.04	19.500
0.8	0.5	4.0446	0.3091	1.21×10^5	0.89	28.200
1.0	0	∞	0	0	0	∞

Rysunek: (Tabela 37.1 Kippenhahn, Weigert, Weiss "Stellar Structure and Evolution" second edition za Cox i Giuli 1968 vII chap. 25

Zależność promień-masa dla białych karłów



Rysunek: ((źródło: AllenMcC - Wikipedia)

Stygnięcie białych karłów - model uproszczony

- Najprostszy model zakłada całkowicie zdegenerowane izotermiczne jądro i otoczkę złożoną z gazu doskonałego. Zakładamy skokowe przejście w równaniu stanu pomiędzy jądrem, a otoczką dla

$$\rho_3 = 0.5\, T_7^{3/2}$$

- Zakładamy, że otoczka jest zjonizowana, nie zawiera wodoru i helu i $\mu = 2$. Równanie stanu gazu doskonałego w tej sytuacji możemy zapisać jako

$$P_{18} = 0.416 \cdot \rho_3 T_7$$

- Zakładamy zależność współczynnika nieprzezroczystości

$$\kappa = \kappa_0 \rho^q T^{-s}$$

- Zakładamy, że otoczka jest w równowadze promienistej

$$\nabla_{rad} \equiv \frac{d \ln T}{d \ln P} = \frac{3\kappa L P}{16\pi G a c M T^4}$$

Stygnięcie białych karłów - model uproszczony

- Przyjmujemy na powierzchni $P = 0$ i $T = 0$, dzięki czemu otrzymujemy

$$T^{s+q+4} = \frac{3\kappa LP}{16\pi GacM}\left(\frac{k}{2m_H}\right)^q \frac{s+q+4}{q+1} P^{q+1}$$

- Dla nieprzezroczystości dla przejść swobodno-związanych korzystamy ze wzoru Kramersa $\kappa = 4 \cdot 10^{25} \rho T^{-3.5}$ i otzymujemy zależność politropową

$$P_{18} = 6.4 \cdot 10^{-3} T_7^{4.25} \sqrt{\frac{L_\odot}{L}\frac{M}{M_\odot}}$$

i z równania stanu gazu doskonałego (μ=2)

$$\rho_3 = 1.53 \cdot 10^{-2} T_7^{3.25} \sqrt{\frac{L_\odot}{L}\frac{M}{M_\odot}}$$

Stygnięcie białych karłów - model uproszczony

- Z warunku na granicę pomiędzy izotermicznym zdegenerowanym jądrem a promienistą otoczką otrzymujemy zależność pomiędzy temperaturą wnętrza a jasnością b.k.

$$T_{7,b} = 7.32 \left(\frac{L}{L_\odot} \frac{M_\odot}{M} \right)^{2/7}$$

- Przyjmujemy, że biały karzeł świeci na koszt energii wewnętrznej jonów znajdujących się w jądrze b.k. (przyjmiemy, że μ_j=12)

$$U = \frac{3k}{2\mu_j m_H} T \cdot M = \frac{k}{8m_H} T \cdot M$$

- Jasność białego karła (skorzystamy z przybliżonej zależności $R/R_\odot = 0.0127(M/M_\odot)^{-1/3}$)

$$\log \frac{L}{L_\odot} = 4 \log \frac{T_{ef}}{T_{ef,\odot}} - \frac{2}{3} \log \frac{M}{M_\odot} - 3.8$$

Stygnięcie białych karłów - model uproszczony

- Charakterystyczna skala czasowa chłodzenia

$$\tau_c \equiv \frac{U}{L}$$

Dla naszego modelu

$$\tau_c = 1.25 \cdot 10^7 \left(\frac{L_\odot}{L} \frac{M}{M_\odot} \right)^{5/7} lat$$

lub

$$\tau_c = 7.9 \cdot 10^{10} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{25/21} \left(\frac{T_{ef}}{T_{ef,\odot}} \right)^{-20/7} lat$$

- Gdy podstawimy zależność pomiędzy temperaturą centralną a jasnością do równania

$$\frac{dU}{dt} = -L$$

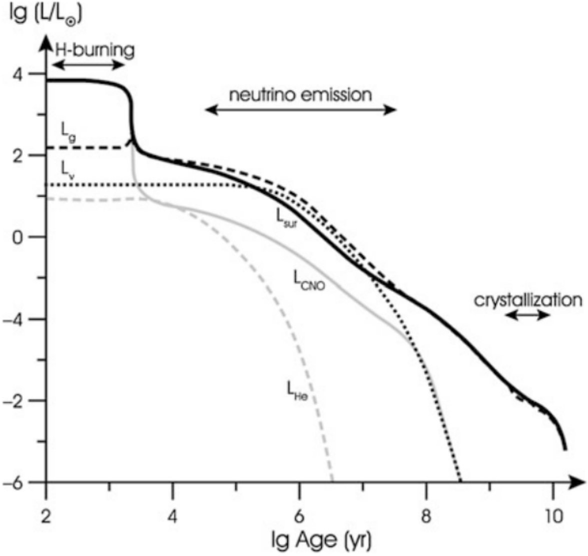
otrzymamy zależność jasności od czasu

$$L \sim t^{-7/5}$$

Budowa i stygnięcie białych karłów - istotne czynniki

- Model kuli w której źródłem ciśnienia są całkowicie zdegenerowane elektrony daje $R \to \infty$ dla $M \to 0$
- Uwzględnienie efektów oddziaływania elektrostatycznego i krystalizacji umożliwia otrzymanie konfiguracji o skończonych rozmiarach dla małych mas (gęstość dąży do stałej wartości dla $P \to 0$)
- W trakcie stygnięcia b.k. krystalizacja zwiększa ciepło właściwe wnętrza.

Chłodzenie białego karła o masie 0.609 $M_\odot$



Rysunek: 37.6 Kippenhahn, Weigert, Weiss "Stellar Structure and Evolution"

Białe karły - podsumowanie

- Końcowy produkt ewolucji gwiazd o masach początkowych mniejszych niż ok. 7-8 $M_\odot$
- Równowaga ciśnieniowa zapewniona przez gaz zdegenerowanych elektronów.
- Masa maksymalna (masa konfiguracji w której zdegenerowane elektrony byłyby ultrarelatywistyczne) - masa politropy o indeksie $n = 3$ i stałej politropowej

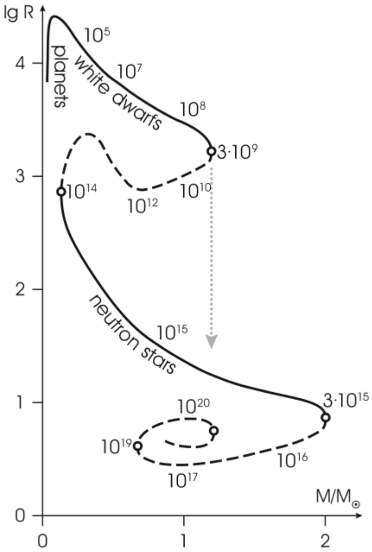
$$K = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{8} \left(\frac{1+X}{2m_H}\right)^{4/3}$$

Dla $X = 0$ $K = 4.89 \cdot 10^{14}$

$$M = 4\pi a_n^3 K^{3/2} \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right)_1 = 1.459 M_\odot$$

- Pozostałością po ewolucji gwiazd podobnych do Słońca będzie węglowo - tlenowy biały karzeł o masie ok. 0.52 $M_\odot$

Zależność masa promień dla białych karłów i gwiazd neutronowych

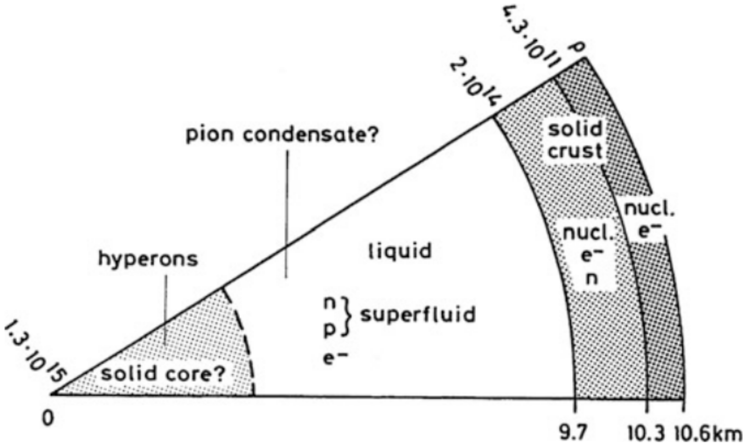


- Rys. 38.3 z Kippenhahn, Weigert, Weiss "Stellar Structure and Evolution"
- Linią ciągłą zanaczone są konfiguracje stabilne, a linią przerywaną niestabilne
- Wzdłuż krzywych podane są gęstości centralne dla niektórych modeli

Gwiazdy neutronowe

- Końcowy produkt ewolucji gwiazd o masach początkowych powyżej 8-9 $M_\odot$.
- Nie jest pewna górna granica początkowej masy gwiazd które w wyniku zapadnięcia się jądra i wybuchu supernowej dadzą gwiazdę neutronową (ok. 20 $M_\odot$, ale zależy to od metaliczności i związanej z nią utraty masy)
- Odkrycie gwiazd neutronowych 1967 - Jocelyn Bell (Burnell) - pulsar PSR B1919+21
- Najbliższą znaną gwiazdą neutronową jest prawdopodobnie RX J1856.5-3754 - odl ok. 140 pc.
- Pulsar o najmniejszym okresie rotacji - PSR J1748-2446ad ($\nu = 716\ Hz$)
- Najmasywniejsze znane gwiazdy neutronowe PSR J1614–2230 ($1.97 \pm 0.04\ M_\odot$) i PSR J0348+043 ($2.01 \pm 0.04\ M_\odot$). Ich towarzyszami są małomasywne białe karły.

Budowa wewnętrzna gwiazdy neutronowej o masie 1.4 $M_\odot$



Rysunek: (38.4 Kippenhahn, Weigert, Weiss "Stellar Structure and Evolution" za D. Pines 1980, Journal de Physique 41

Czarne dziury

- Kolaps obiektów o masach powyżej 20 $M_\odot$ nie będzie już równoważony przez ciśnienie.
- Według OTW powstaje osobliwość, którą otacza horyzont (czarna dziura). i która grawitacyjne oddziałuje na otoczenie.
- Pierwsze rozwiązanie dla metryki czasoprzestrzeni wokół nierotującej czarnej dziury (zależnej tylko od masy) - Karl Schwarzschild 1916.
- Promień horyzontu nierotującej czarnej dziury to

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \approx 3 \frac{M}{M_\odot} km$$

Rotujące czarne dziury

- Pierwsze rozwiązanie dla metryki czasoprzestrzeni wokół rotującej czarnej dziury (zależnej od masy i momentu pędu) - Roy P. Kerr 1963 - istnienie horyzontu i ergosfery (obszaru czasoprzestrzeni współrotującego z czarną dziurą.
- Rozmiar zewnętrznego horyzontu rotującej czarnej dziury - $a = J/(Mc)$
$$r_h = \frac{1}{2}(r_s + \sqrt{r_s^2 - 4a^2})$$
- Rozmiar zewnętrznej ergosfery
$$r_E = \frac{1}{2}(r_s + \sqrt{r_s^2 - 4a^2 \cos^2\theta})$$

Rotacja gwiazd

- Gwiazdy powstają z obłoków gazu, których początkowe rozmiary są wiele rzędów wielkości większe niż rozmiary gwiazd. Z zasady zachowania momentu pędu wynika, że nawet przy bardzo powolnej rotacji obłoku gazu znaczna część mometu pędu musi być utracona aby gwiazda mogła powstać.
- Każda nowo powstała gwiazda rotuje.
- Zmiany prędkości kątowej rotacji mogą zachodzić na skutek utraty momentu pędu i zmian w strukturze gwiazdy

Warunek równowagi hydrostatycznej dla rotujących gwiazd

- Ogólna postać warunku równowagi hydrostatycznej

$$\nabla P = \rho(-\nabla\Phi + \mathbf{f})$$

- Potencjał samograwitacji z gęstością wiąże równanie Poissona

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$$

- W przypadku rotacji $\mathbf{f}$ jest siłą odśrodkową

$$\mathbf{f} = \Omega^2 s\mathbf{e_s}$$

- Ciśnienie i potencjał spełniają następujące warunki brzegowe
  Na powierzchni (S) P=0
  Na zewnątrz S, potencjał dany jest rozwiązaniem równania Lapelace'a zmierzającym do zera przy oddalaniu się od S do nieskończoności.

Warunek równowagi hydrostatycznej dla rotujących gwiazd c.d.

- Gdy zastosujemy operator rotacji we współrzędnych cylindrycznych do siły odśrodkowej otrzymamy
$$rot\mathbf{f} = \left(\frac{1}{s}\frac{\partial f_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e_s} + \left(\frac{\partial f_s}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial s}\right)\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{s}\left(\frac{1}{\partial s}(sf_\varphi) - \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e_z}$$
$$rot\mathbf{f} = \frac{\partial \Omega^2}{\partial z} s\mathbf{e}_\varphi$$
- Siła odśrodkowa jest potencjalna wtedy (i tylko wtedy) gdy Ω nie zależy od z. Mówimy wtedy o rotacji cylindrycznej.
- Jeżeli mamy rotację cylindryczną, to potencjał siły odśrodkowej dany jest wzorem
$$\Phi_{cen} = -\int \Omega^2 s ds$$
- Warunek równowagi hydrostatycznej możemy zapisać wtedy jako ($\Phi_T = \Phi + \Phi_{cen}$)
$$\nabla P = -\rho \nabla \Phi_T,$$

Warunek równowagi hydrostatycznej dla rotujących gwiazd c.d.

- Formalnym rozwiązaniem równania Poissona jest

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}$$

- Jeżeli wszystkie siły działające na gwiazdę są potencjalne, to zarówno ciśnienie jak i gęstość są stałe na powierzchniach stałego potencjału całkowitego.

$$\nabla P = -\rho \nabla \Phi_T,$$

  Z powyższego równania wynika
  1) ∇P jest równoległy do $\nabla \Phi_T$
  2) gdy zastosujemy do niego operator rotacji, to otrzymamy

$$\nabla \rho \times \nabla \Phi_T = 0$$

  a więc gradient gęstości jest równoległy do pozostałych.
- W obszarach jednorodnych chemicznie wszystkie wielkości skalarne są stałe na powierzchniach ekwipotencjalnych

Model Roche'a

- W przypadku rotacji jednorodnej niezłe przybliżenie dla Φ_T daje model Roche'a, w którym zaniedbuje się odkształcenie rozkładu materii od symetrii sferycznej i wkład masy leżącej powyżej sfery o promieniu r
- Siłę odśrodkową możemy zapisać we współrzędnych sferycznych

$$\mathbf{f} = \Omega^2 r \sin\theta (\sin\theta \mathbf{e_r} + \cos\theta \mathbf{e}_\theta)$$

- Potencjał całkowity w przybliżeniu Roche'a

$$\Phi_T = -\frac{GM_r}{r} - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2\theta$$

- Możemy w tym przybliżeniu łatwo policzyć stosunek promienia równikowego R_e do biegunowego R_p.

$$\frac{R_e}{R_p} = 1 + \frac{\Omega^2 R_e^3}{GM} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Omega}{\Omega_{max}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2}\epsilon_{rot}$$

Struktura radialna

- Warunek równowagi mechanicznej w kierunku radialnym w przypadku powolnej rotacji

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} + \frac{2}{3}\frac{\Omega^2}{4\pi r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4}(1 - q_{rot}),$$

gdzie $q_{rot} = \frac{2\Omega^2 r^3}{3GM_r}$

- W przypadku gdyby Ω zależała od θ to

$$\bar{\Omega}^2 = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\Omega^2(1-\mu^2)d\mu$$

- Modyfikacja gradientu promienistego

$$\nabla_{rad} = \frac{3\kappa L_r P}{16\pi GacM_r(1-q_{rot})T^4}$$

- Tak zmodyfikowane równania można wykorzystać w modelowaniu struktury i ewolucji gwiazd rotujących. Główną trudność stanowi wyznaczenie $\bar{\Omega}^2(M_r)$.

Prawo von Zeipela

- Jeżeli mamy rotację cylindryczną i jeżeli skład chemiczny jest stały na powierzchniach ekwipotencjalnych, to współczynniki nieprzezroczystości i tempa produkcji energii również będą stałe na tych powierzchniach. Strumień energii promienistej w przybliżeniu dyfuzyjnym możemy zapisać jako

$$\mathbf{F_{rad}} = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho}\nabla T = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho}\frac{dT}{d\Phi_T}\nabla\Phi_T = \eta(\Phi_T)\mathbf{g}$$

- Na powierzchni ekwipotencjalnej wartość $\eta(\Phi_T)$ jest stała, natomiast wartości $g = |\mathbf{g}|$ i $F_{rad} = |\mathbf{F_{rad}}|$ stałe nie są.
- Na przykład w modelu Roche'a stosunek przyspieszenia grawitacyjnego na biegunie g_p do przyspieszenia graw. na równiku g_e wynosi

$$\frac{g_p}{g_e} = \frac{(r_e/r_p)^2}{1-\epsilon_{rot}} = \frac{(1+0.5\epsilon_{rot})^2}{1-\epsilon_{rot}}$$

Prawo von Zeipela c.d.

- Prawo von Zeipel'a dla rozkładu temperatury efektywnej na powierzchni niesferycznej gwiazdy

$$T_{ef} \sim F_{rad}^{1/4} \sim g^{1/4}$$

Paradoks von Zeipela

- W gwieździe niesferycznej na ogół nie udaje się spełnić warunku równowagi cieplnej w postaci
$$\rho T \frac{dS}{dt} = \epsilon\rho - \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$
Łatwo go dostrzec, gdy do wzoru podstawimy $\nabla \cdot \mathbf{F}$ wynikające ze wzoru $\mathbf{F}_{\mathbf{rad}} = \eta(\Phi_T)\mathbf{g}$. Otrzymamy wtedy
$$\rho T \frac{dS}{dt} = \epsilon\rho - \eta\nabla^{\mathbf{2}}\Phi_T - \frac{d\eta}{d\Phi_T} g^2$$
- Widać, że nie można tych wyrazów skompensować. Na przykład dla rotacji jednorodnej mamy
$$\nabla^{\mathbf{2}}\Phi_T = 4\pi G\rho - 2\Omega^2$$
Tak więc wszystkie składniki po prawej stronie oprócz g^2 są stałe na powierzchni stałego potencjału.
- Dla szczególnego przypadku $\frac{d\eta}{d\Phi_T} = 0$, aby spełnić $\mathrm{dS/dt} = 0$ trzeba mieć nierealistyczne prawo generacji energii $\epsilon = 4\pi G - 2\Omega^2/\rho$

Cyrkulacja południkowa

- Brak równowagi termicznej w przypadku rotacji jednorodnej jest przyczyną istnienia cyrkulacji południkowej.
- Przybliżony wzór na prędkość cyrkulacji południkowej

$$v_{mc} \approx \frac{LR^2}{GM}\frac{g'}{\bar{g}} \approx \frac{R}{\tau_{th}}\left(\frac{\Omega^2}{\Omega_{max}}\right)^2$$