

Ćwiczenia z mechaniki nieba, 24 i 31 marca 2020

Wyznaczanie elementów orbitalnych planetoidy na podstawie trzech obserwacji

Mamy dane trzy obserwacje planetoidy

o ^h TT	R.A. (J2000.0)	Dec. (J2000.0)
2002 Jul 10	21 ^h 15 ^m .40 = 318°.8500 = 5.564 982 rad	+16° 13'.8 = +16°.2300 = +0.283 267 rad
2002 Jul 15	21 ^h 12 ^m .44 = 318°.1100 = 5.552 067 rad	+16° 03'.5 = +16°.0583 = + 0.280 271 rad
2002 Jul 25	21 ^h 05 ^m .60 = 316°.4000 = 5.522 222 rad	+15° 24.8 = +15°.4133 = + 0.269 013 rad

Współrzędne kartezjańskie Słońca w tych dniach wynoszą

$x_{o1} = -0.306\,728\,3$	$y_{o1} = +0.889\,290\,0$	$z_{o1} = +0.385\,549\,5 \text{ AU}$
$x_{o2} = -0.386\,194\,4$	$y_{o2} = +0.862\,645\,7$	$z_{o2} = +0.373\,999\,6$
$x_{o3} = -0.536\,330\,8$	$y_{o3} = +0.791\,387\,2$	$z_{o3} = +0.343\,100\,4$

Proszę wyznaczyć elementy orbitalne planetoidy.

Za obecną wartość nachylenia płaszczyzny równikowej Ziemi do płaszczyzny ekliptyki proszę przyjąć $\varepsilon = 23^{\circ}26'12''$

Rozwiązanie

Obliczamy kosinusy kierunkowe dla trzech obserwacji

$$l_i = l(t_i) = \cos(\alpha_i) \cos(\delta_i)$$

$$m_i = m(t_i) = \sin(\alpha_i) \cos(\delta_i)$$

$$n_i = n(t_i) = \sin(\delta_i)$$

$$\begin{array}{lll} l_1 = 0.7229874 & l_2 = 0.7153749 & l_3 = 0.6981152 \\ m_1 = -0.6318031 & m_2 = -0.6416559 & m_3 = -0.6648234 \\ n_1 = 0.2794887 & n_2 = 0.2766159 & n_3 = 0.2657912 \end{array}$$

Przedziały czasu:

$$\tau_1 = 10 \text{ dni} = 0.1720210$$

$$\tau_2 = 15 \text{ dni} = 0.2580315$$

$$\tau_3 = 5 \text{ dni} = 0.0860105$$

W zerowym przybliżeniu, dla pierwszej iteracji przyjmujemy

$$a_1 = b_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = b_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2} = \frac{2}{3}$$

Układ równań na odległości planetoidy od Ziemi Δ_1 Δ_2 i Δ_3 ma postać:

$$\begin{aligned} 0.4819917\Delta_1 - 0.7153750\Delta_2 + 0.2327051\Delta_3 &= 0.0029319 \\ -0.4212021\Delta_1 + 0.6416559\Delta_2 - 0.2216078\Delta_3 &= -0.0059899 \\ 0.1863258\Delta_1 - 0.2766159\Delta_2 + 0.0885971\Delta_3 &= -0.0025998 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem są:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2.716659 \quad \Delta_2 = 2.673947 \quad \Delta_3 = 2.6058711 \\ (x_1, y_1, z_1) &= (+1.964111, -1.716394, +0.759276) \\ (x_2, y_2, z_2) &= (+1.912875, -1.715754, +0.739656) \\ (x_3, y_3, z_3) &= (+1.819198, -1.732444, +0.692618) \\ (\xi_1, \eta_1, \zeta_1) &= (+2.270839, -2.605684, +0.373726) \\ (\xi_2, \eta_2, \zeta_2) &= (+2.299069, -2.578400, +0.365657) \\ (\xi_3, \eta_3, \zeta_3) &= (+2.355529, -2.523831, +0.349517) \\ r_1 &= 3.476488 \quad r_2 = 3.473841 \quad r_3 = 3.4699287 \end{aligned}$$

Szanowni Państwo.

Z uporem godnym lepszej sprawy na ćwiczeniach korzystałem ze wzoru z wykładu w którym była pomyłka. We wzorach na A_i , w mianowniku w wyrazie zawierającym τ^3 w mianowniku jest $6r^3$, a nie $6r^2$. Właściwe wzory na pola trójkątów A_i są następujące (w wykładzie zostało to poprawione).

Możemy skorzystać ze wzorów wyprowadzonych na wykładzie

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{p}\tau_1 \left(1 - \frac{\tau_1^2}{6r_2^3} + \frac{\tau_1^3}{4r_2^4}\dot{r}_2 \right) \\ A_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{p}\tau_2 \left(1 - \frac{\tau_2^2}{6r_2^3} + \frac{\tau_2^2(\tau_1 - \tau_3)}{4r_2^4}\dot{r}_2 \right) \\ A_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{p}\tau_3 \left(1 - \frac{\tau_3^2}{6r_2^3} - \frac{\tau_3^3}{4r_2^4}\dot{r}_2 \right), \end{aligned}$$

które dają przybliżone wartości a_1 i a_3 :

$$\begin{aligned} a_1 = A_1/A_2 &= \frac{\tau_1}{\tau_2} \left(1 + \frac{\tau_3(\tau_2 + \tau_1)}{6r_2^3} + \frac{\tau_3(\tau_3(\tau_1 + \tau_3) - \tau_1^2)}{4r_2^4}\dot{r}_2 \right) \\ a_3 = A_3/A_2 &= \frac{\tau_3}{\tau_2} \left(1 + \frac{\tau_1(\tau_2 + \tau_3)}{6r_2^3} - \frac{\tau_1(\tau_1(\tau_1 + \tau_3) - \tau_3^2)}{4r_2^4}\dot{r}_2 \right). \end{aligned}$$

Na korektę wartości a_1 i a_3 większy wpływ ma wyraz, w którego mianowniku jest $6r_2^3$, przykładowo

$$\begin{aligned} \frac{\tau_3(\tau_2 + \tau_1)}{6r_2^3} &= 1.47059 \cdot 10^{-4} \\ \frac{\tau_3(\tau_3(\tau_1 + \tau_3) - \tau_1^2)}{4r_2^4}\dot{r}_2 &= 2.77702 \cdot 10^{-8} \end{aligned}$$

Możemy zobaczyć jak zmieniają się przedziały czasów τ_i w związku ze zmianą odległości planety od Ziemi

$$\tau_1 = t_3 - t_2 + (\Delta_2 - \Delta_3)/c = 0.1720210 + 6.76 \cdot 10^{-6}$$

$$\tau_3 = t_2 - t_1 + (\Delta_1 - \Delta_2)/c = 0.0860105 + 4.24 \cdot 10^{-6}$$

W programie początkowo nie uwzględniałem tej zmiany, ale poprawka nie przyniosła istotnych różnic w ostatecznym wyniku. Gdy podstawimy poprawione wartości τ_i otrzymamy:

$$\frac{\tau_3(\tau_2 + \tau_1)}{6r_2^3} = 1.47072 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{\tau_3(\tau_3(\tau_1 + \tau_3) - \tau_1^2)}{4r_2^4} \dot{r}_2 = 2.77714 \cdot 10^{-8}$$

Poprawione wartości a_i :

$$a_1 = 0.6667626$$

$$a_3 = 0.3334141$$

Otrzymujemy układ równań z poprawionymi współczynnikami:

$$+0.4820610\Delta_1 - 0.7153750\Delta_2 + 0.2327615\Delta_3 = 0.00285918$$

$$-0.4212627\Delta_1 + 0.6416559\Delta_2 - 0.2216615\Delta_3 = -0.00584074$$

$$+0.1863526\Delta_1 - 0.2766159\Delta_2 + 0.0886185\Delta_3 = -0.00253510$$

i otrzymujemy zmienione odległości i współrzędne geocentryczne

$$\Delta_1 = 2.648790 \quad \Delta_2 = 2.607508 \quad \Delta_3 = 2.540482$$

$$(x_1, y_1, z_1) = (1.915042, -1.673513, 0.740307)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (1.865345, -1.673122, 0.721278)$$

$$(x_3, y_3, z_3) = (1.773550, -1.688972, 0.675238)$$

Ze współrzędnych geocentrycznych, otrzymujemy heliocentryczne, a następnie $r_1 = 3.410290$, $r_2 = 3.408835$, $r_3 = 3.405590$. Możemy następnie obliczyć poprawione wartości a_1 i a_3 ...

Po siedmiu iteracjach, kiedy zmiany w odległości r_2 pomiędzy kolejnymi iteracjami były mniejsze od 10^{-7} otrzymane zostały następujące wielkości:

- odległości geocentryczne:

$$\Delta_1 = 2.644634 \quad \Delta_2 = 2.603436 \quad \Delta_3 = 2.536471$$

- współrzędne geocentryczne:

$$(x_1, y_1, z_1) = (1.912037, -1.670888, 0.739145)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (1.862433, -1.670510, 0.720152)$$

$$(x_3, y_3, z_3) = (1.770749, -1.686305, 0.674172)$$

- współrzędne heliocentryczne:

$$\begin{aligned}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) &= (+2.218766, -2.560178, +0.353596) \\(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) &= (+2.248628, -2.533156, +0.346152) \\(\xi_3, \eta_3, \zeta_3) &= (+2.307080, -2.477693, +0.331071)\end{aligned}$$

- odległości heliocentryczne:

$$r_1 = 3.406239 \quad r_2 = 3.404853 \quad r_3 = 3.401645$$

Te współrzędne będziemy wykorzystywali do wyznaczenia elementów orbitalnych.

Najpierw wyznaczymy parametr orbity. Możemy łatwo policzyć pole powierzchni trójkątów, których wierzchołkami są Słońce i dwa położenia planetoidy, np w momentach t_1 i t_3 .

Stosunek pola powierzchni sektora określonego przez promień wodzący planetoidy w ruchu wokół Słońca, do pola trójkąta dany jest przez poprawki, które otrzymaliśmy na powierzchnie trójkątów A_1, A_2, A_3 . Na przykład

$$A_2 = \frac{1}{2} \sqrt{p} \tau_2 \left(1 - \frac{\tau_2^2}{6r_2^3} + \frac{\tau_2^2(\tau_1 - \tau_3)}{4r_2^4} \dot{r}_2 \right) = B_2 \left(1 - \frac{\tau_2^2}{6r_2^3} + \frac{\tau_2^2(\tau_1 - \tau_3)}{4r_2^4} \dot{r}_2 \right).$$

Czyli (kąt $2f_2$ jest to kąt pomiędzy wektorami $\vec{r}_1 = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, a $\vec{r}_3 = (\xi_3, \eta_3, \zeta_3)$)

$$\sqrt{p} = \frac{2 \cdot A_2}{\tau_2 \left(1 - \frac{\tau_2^2}{6r_2^3} + \frac{\tau_2^2(\tau_1 - \tau_3)}{4r_2^4} \dot{r}_2 \right)} = \frac{r_1 r_3 \sin 2f_2}{\tau_2 \left(1 - \frac{\tau_2^2}{6r_2^3} + \frac{\tau_2^2(\tau_1 - \tau_3)}{4r_2^4} \dot{r}_2 \right)} = \frac{0.41807010}{0.2580422 \cdot 0.9997188} = 1.620617$$

Czyli $p = 2.62640$.

Mając parametr orbity, odległości r_1 i r_3 i kąt $2f_2$ (anomalie prawdziwa $\vartheta_3 = \vartheta_1 + 2f_2$) możemy zapisać

$$\begin{aligned}e \cos \vartheta_1 &= \frac{p}{r_1} - 1 \\ \cos 2f_2 &= \frac{\xi_1 \xi_3 + \eta_1 \eta_3 + \zeta_1 \zeta_3}{r_1 r_3}\end{aligned}$$

$$e \cdot \cos(\vartheta_1 + 2f_2) = e(\cos \vartheta_1 \cos 2f_2 - \sin \vartheta_1 \sin 2f_2) = \frac{p}{r_3} - 1$$

Z tego otrzymujemy

$$e \cdot \sin \vartheta_1 = \frac{e \cdot \cos \vartheta_1 \cos 2f_2 - (\frac{p}{r_3} - 1)}{\sin 2f_2} = \frac{(\frac{p}{r_1} - 1) \cos 2f_2 - (\frac{p}{r_3} - 1)}{\sin 2f_2}$$

podnosząc równania na $e \cos \vartheta_1$ i $e \sin \vartheta_1$ do kwadratu i dodając stronami otrzymujemy wartość mimośrod e .

$$e = \left\{ \left(\frac{p}{r_1} - 1 \right)^2 + \left[\frac{(\frac{p}{r_1} - 1) \cos 2f_2 - (\frac{p}{r_3} - 1)}{\sin 2f_2} \right]^2 \right\}^{1/2} = 0.23028$$

Mając wartości parametru orbity p i mimośrodu e otrzymujemy wielką półoś orbity

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = 2.77347$$

Z tych samych równań otrzymujemy wzory na $\cos \vartheta_1$ i $\sin \vartheta_1$

$$\cos \vartheta_1 = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_1} - 1 \right)$$

$$\sin \vartheta_1 = \frac{(\frac{p}{r_1} - 1) \cos 2f_2 - (\frac{p}{r_3} - 1)}{e \cdot \sin 2f_2}$$

i otrzymujemy $\vartheta_1 = 186.167^\circ$.

Z zależności pomiędzy anomalią prawdziwą i mimośrodową otrzymujemy

$$E_1 = 3.277600 \text{ rad} = 187.792^\circ.$$

$$\text{Z równania Keplera } M_1 = 3.30882 \text{ rad} = 189.582^\circ$$

$$\text{Okres orbitalny } P = a^{3/2} = 4.61886 = 1687.072 \text{ dni}$$

$$\text{Przejście przez peryhelium } t_0 = t_1 - 888.438 \text{ dni}$$

$$\text{Następne przejście przez peryhelium będzie dla } t = t_1 + 798.634 \text{ dni}$$

Mamy już trzy elementy orbitalne. Następne możemy otrzymać albo korzystając ze wzorów na elementy macierzy podane na wykładzie:

$$P_x = \frac{\xi_3 y_1 - \xi_1 y_3}{y_1 x_3 - y_3 x_1} = \frac{\xi_1 r_3 \sin \vartheta_3 - \xi_3 r_1 \sin \vartheta_1}{r_1 r_3 \sin 2f_2} = -0.5664286$$

$$Q_x = \frac{\xi_3 x_1 - \xi_1 x_3}{y_3 x_1 - y_1 x_3} = \frac{\xi_3 r_1 \cos \vartheta_1 - \xi_1 r_3 \cos \vartheta_3}{r_1 r_3 \sin 2f_2} = -0.821287$$

$$P_y = \frac{\eta_1 r_3 \sin \vartheta_3 - \eta_3 r_1 \sin \vartheta_1}{r_1 r_3 \sin 2f_2} = 0.8149861$$

$$Q_y = \frac{\eta_3 r_1 \cos \vartheta_1 - \eta_1 r_3 \cos \vartheta_3}{r_1 r_3 \sin 2f_2} = -0.5459580$$

$$P_z = \frac{\zeta_1 r_3 \sin \vartheta_3 - \zeta_3 r_1 \sin \vartheta_1}{r_1 r_3 \sin 2f_2} = -0.1223054$$

$$Q_z = \frac{\zeta_3 r_1 \cos \vartheta_1 - \zeta_1 r_3 \cos \vartheta_3}{r_1 r_3 \sin 2f_2} = 0.1655824$$

Ze wzorów umożliwiających nam policzenie odległości peryhelium od węzła wstępującego ($\epsilon = 23^\circ 26' 12''$):

$$\sin \omega \sin i = P_z \cos \epsilon - P_y \sin \epsilon = -0.4363639$$

$$\cos \omega \sin i = Q_z \cos \epsilon - Q_y \sin \epsilon = 0.3690687$$

Otrzymujemy

$$\omega = 310.224^\circ$$

Ze wzorów na sinusy i cosinusy węzła wstępującego:

$$\sin \Omega = (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \frac{1}{\cos \epsilon} = 0.1192870$$

$$\cos \Omega = (P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega) = -0.9928607$$

$$\Omega = 173.149^\circ$$

Ze wzoru na cosinys nachylenia płaszczyzny orbity do płaszczyzny ekliptyki

$$\cos i = -(P_x \sin \omega + Q_x \cos \omega) \frac{1}{\sin \Omega} = 0.8205836$$

otrzymujemy

$$i = 34.857^\circ$$

Elementy orbitalne Ω , ω i i możemy otrzymać również metodą stosowaną na ćwiczeniach, gdy obliczaliśmy elementy orbitalne na podstawie danych położenia i prędkości ciała.

Możemy policzyć składowe momentu pędu najpierw w układzie równikowym równonocnym,

$$(J_\xi, J_\eta, J_\zeta) = (0.1104835, 0.314786, 1.585908),$$

a następnie przetransformować je do układu ekliptycznego

$$(J_X, J_Y, J_Z) = (0.110484, 0.919648, 1.329828)$$

i zastosować wzory z ćwiczeń.