

Wykład 2 - zagadnienie dwóch ciał

02.03.2020

Prawa Keplera

Na podstawie obserwacji zgromadzonych przez Tycho Brahe (głównie obserwacji Marsa) Johannes Kepler sformułował i opublikował w latach 1609 (*Astronomia nova*) i 1619 (*Harmonices Mundi*) trzy prawa opisujące ruch planet.

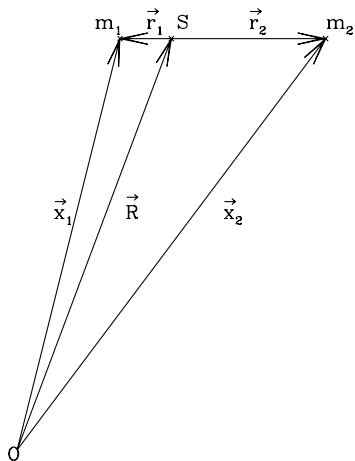
1. Planety poruszają się po orbitach eliptycznych. Słońce znajduje się w jednym z ognisk elipsy.
2. Prędkość polowa planety w jej ruchu orbitalnym względem Słońca jest stała.
3. stosunek trzeciej potęgi rozmiarów wielkiej półosi orbity do kwadratu okresu orbitalnego jest stały.

Równanie biegunowe krzywej stożkowej

$$r = \frac{p}{(1 + e \cos \varphi)}$$

- ▶ r - odległość od jednego z ognisk (centrum siły)
- ▶ φ - anomalia prawdziwa
- ▶ p - parametr $p = a(1 - e^2)$
- ▶ e - mimośród
- ▶ równanie krzywej stożkowej we współrzędnych biegunowych ($e < 1$ - elipsa, $e = 1$ - parabola, $e > 1$ - hiperbola)

Zagadnienie dwóch ciał



Równania ruchu dwóch punktowych mas oddziałujących grawitacyjnie

Mamy dwa równania ruchu i aby je rozwiązać będziemy potrzebować 12 stałych całkowania.

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r}_{12}$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r}_{12}$$

Równania ruchu środka masy

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r}_{12}$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r}_{12}$$

Dodajemy równania stronami

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = 0$$

Ponieważ mamy ruch ciał o stałej masie, to

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2) = 0$$

Równanie ruchu środka masy c.d.

Wektor położenia środka masy jest określony jako

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

tak więc mamy

$$(m_1 + m_2) \cdot \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = 0$$

Środek masy porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Mamy sześć pierwszych stałych całkowania ($\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \dot{\vec{R}}_0 \cdot t$)

Równanie ruchu względnego

Równania obustronnie dzielimy przez m_1 (pierwsze) i m_2 (drugie), a następnie odejmujemy równanie pierwsze od drugiego:

$$\frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = \frac{Gm_2}{r^3} \vec{r}_{12}$$

$$\frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{r^3} \vec{r}_{12}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = -\frac{G(m_2 + m_1)}{r^3} \vec{r}_{12}$$

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \vec{R} + \vec{r}_2 - \vec{R} - \vec{r}_1$$

Otrzymujemy równanie ruchu ciała drugiego względem pierwszego
Od tego momentu wektor położenia ciała drugiego względem pierwszego będziemy oznaczać jako $\vec{r} = \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Równanie ruchu względnego c.d.

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_2 + m_1)}{r^3}\vec{r}$$

Gdy pomnożymy stronami przez $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ otrzymamy odpowiednik równania ruchu punktu materialnego wokół nieruchomego centrum siły

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 m_2)}{r^3}\vec{r} = -\frac{\gamma}{r^3}\vec{r}$$

Zasada zachowania momentu pędu i drugie prawo Keplera

Równanie ruchu względnego mnożymy wektorowo przez $\vec{r}$ i otrzymujemy

$$\vec{r} \times \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = 0.$$

Korzystając z różniczkowania funkcji złożonej możemy zapisać, że

$$\vec{r} \times \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}} \times \mu \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}})$$

Tak więc mamy zasadę zachowania momentu pędu, czyli stałą wartość prędkości polowej (II prawo Keplera)

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}) = 0$$

czyli

$$(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}) = \text{const}$$

Aby sprawdzić czemu równa jest ta stała zapiszemy moment pędu układu względem środka masy

$$\vec{J}_s = m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2$$

Pamiętając, że

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

otrzymujemy

$$\vec{J}_s = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

Zasada zachowania energii

Równanie ruchu względnego pomnożymy teraz skalarnie przez $\dot{\vec{r}}$ i otrzymamy

$$\mu \dot{\vec{r}} \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\dot{\vec{r}} \cdot \frac{\gamma}{r^3} \vec{r} = \dot{\vec{r}} \cdot \nabla \left(\frac{\gamma}{r} \right)$$

a następnie

$$\frac{d}{dt} \left(\mu \frac{1}{2} (\dot{\vec{r}}^2) - \frac{\gamma}{r} \right) = 0$$

czyli

$$\left(\mu \frac{1}{2} (\dot{\vec{r}}^2) - \frac{\gamma}{r} \right) = \text{const}$$

Jeżeli zapiszemy równanie na energię w układzie środka masy

$$\frac{1}{2} (m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + m_2 \dot{\vec{r}}_2^2) - \frac{\gamma}{r} = \mathcal{E}_s$$

i skorzystamy z zależności na $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ otrzymamy

$$\left(\mu \frac{1}{2} (\dot{\vec{r}}^2) - \frac{\gamma}{r} \right) = \mathcal{E}_s$$

Od tej pory energię względem środka masy $\mathcal{E}_s$ będziemy zapisywać jako $\mathcal{E}$

Tor ruchu względnego

Ruch względny odbywa się w ustalonej płaszczyźnie i możemy go zapisać we współrzędnych biegunowych

$$J = \mu r^2 \dot{\varphi}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - \frac{\gamma}{r}$$

podstawiając $\dot{\varphi} = J/(\mu r^2)$ i $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} J/(\mu r^2)$ otrzymamy równanie toru

$$\frac{1}{2} \frac{J^2}{\mu r^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{J^2}{\mu r^4} - \frac{\gamma}{r} = \mathcal{E}$$

i następnie ..

Tor ruchu względnego c. d.

$$\frac{J^2}{2\mu} \left[\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{\gamma}{r} = \mathcal{E}.$$

Podstawiamy $r = 1/w$

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{w^2} \frac{dw}{d\varphi}$$

i otrzymujemy

$$\frac{J^2}{2\mu} \left[\left(\frac{dw}{d\varphi} \right)^2 + w^2 \right] - \gamma w = \mathcal{E}$$

i następnie

$$\frac{dw}{d\varphi} = \pm \left(-w^2 + \frac{2\mu\gamma}{J^2} w + \frac{2\mu\mathcal{E}}{J^2} \right)^{1/2}$$

Tor ruchu względnego c.d.

$$\frac{dw}{d\varphi} = \pm \left(-w^2 + \frac{2\mu\gamma}{J^2} w + \frac{2\mu\mathcal{E}}{J^2} \right)^{1/2}$$

Podstawienie $w = x + \mu\gamma/J^2$ prowadzi do równania

$$\frac{dx}{\left[\frac{\mu^2\gamma^2}{J^4} \left(1 + \frac{2\mathcal{E}J^2}{\mu\gamma^2} \right) - x^2 \right]^{1/2}} = \pm d\varphi$$

następnie $x = y \frac{\mu\gamma}{J^2} \left(1 + \frac{2\mathcal{E}J^2}{\mu\gamma^2} \right)^{1/2}$ daje już

$$\frac{dy}{(1 - y^2)^{1/2}} = \pm \varphi$$

Tor ruchu względnego c. d. - krzywe stożkowe, I prawo Keplera

Podstawienie $y = \cos \alpha$ daje rozwiązanie toru, które po powrocie do zmiennej r ma postać

$$\frac{\mu\gamma}{J^2} + \frac{\mu\gamma}{J^2} \left(1 + \frac{2\mathcal{E}J^2}{\mu\gamma^2}\right)^{1/2} \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{r}$$

i

$$r = \frac{\frac{J^2}{\mu\gamma}}{1 + \left(1 + \frac{2\mathcal{E}J^2}{\mu\gamma^2}\right)^{1/2} \cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

co jest równaniem krzywej stożkowej o własnościach określonych przez znak $\mathcal{E}$ (jeżeli $J^2 > 0$).

- ▶ $\mathcal{E} < 0$ ruch względny odbywa się po torze eliptycznym.
Stanowi to treść pierwszego prawa Keplera.
- ▶ $\mathcal{E} = 0$ równaniem toru jest parabola
- ▶ $\mathcal{E} > 0$ równaniem toru jest hiperbola.

Stałe p i e

W równaniu toru

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

p - parametr orbity

$$p = \frac{J^2}{\mu \gamma}$$

e - mimośród orbity

$$e = \left(1 + \frac{2\mathcal{E}J^2}{\mu\gamma^2}\right)^{1/2}$$

Zależność pomiędzy energią a wielką półosią elipsy a

W przypadku $\mathcal{E} < 0$ i ruchu po elipsie największa i najmniejsza odległość wynosi odpowiednio $Q = p/(1 - e)$ i $q = p/(1 + e)$, w związku z tym wielka półoś elipsy

$$a = \frac{1}{2}(q + Q) = \frac{1}{2}p\left(\frac{1}{1 - e} + \frac{1}{1 + e}\right) = \frac{p}{1 - e^2}$$

co po podstawieniu daje

$$a = -\frac{\gamma}{2\mathcal{E}} = -\frac{Gm_1m_2}{2\mathcal{E}}$$

i zależność energii od wielkiej półosi elipsy

$$\mathcal{E} = -\frac{Gm_1m_2}{2a}$$

Prędkość orbitalna ruchu względnego

Korzystając z równania zachowania energii możemy podać wartość prędkości orbitalnej dla ruchu po orbicie eliptycznej $v = |\dot{\vec{r}}|$

$$\frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} = -\frac{Gm_1m_2}{2a}$$

otrzymamy

$$v = (G(m_1 + m_2))^{1/2} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)^{1/2}.$$

Korzystamy ze stałości prędkości polowej, która w okresie równym okresowi orbitalnemu P powinna dać pole elipsy $S = \pi ab$

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} \cdot P = \pi ab$$

Podstawimy wartość prędkości polowej dla najmniejszej odległości pomiędzy ciałami (wtedy nie mamy składowej radialnej prędkości)

III prawo Keplera

$$v = r\dot{\varphi} = (G(m_1 + m_2))^{1/2} \left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a} \right)^{1/2}$$

$$v = (G(m_1 + m_2))^{1/2} \left(\frac{1}{a} \frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2}$$

Iloczyn predkosci polowej i okresu orbitalnego da nam pole elipsy
($\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$)

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \cdot P = \frac{1}{2} (G(m_1 + m_2))^{1/2} \left(\frac{1}{a} \frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} \cdot a(1-e) \cdot P = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$$

otrzymujemy (uogólnione) III prawo Keplera

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

Zależność położenia od czasu.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{J^2}{\mu r^2} + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - \frac{\gamma}{r}$$

$$\dot{r}^2 = \frac{\gamma}{\mu} \left(\frac{2\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{2}{r} - \frac{p}{r^2} \right) = \frac{\gamma}{\mu} \left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{r} - \frac{a(1-e^2)}{r^2} \right)$$

$$\frac{dr}{dt} = \left(\frac{\gamma}{\mu} \right)^{1/2} \left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{r} - \frac{a(1-e^2)}{r^2} \right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{e} \frac{r dr}{\left(a \left(1 - \left(\frac{a-r}{ae} \right)^2 \right) \right)^{1/2}} = \left(\frac{\gamma}{\mu} \right)^{1/2} dt$$

Zależność położenia od czasu c.d.

Podstawiamy $\xi = (a - r)/(ae)$ czyli $r = a(1 - e\xi)$ i $dr = -aed\xi$ i otrzymujemy

$$\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{1/2} a^{-3/2} dt = \frac{e\xi d\xi}{(1 - \xi^2)^{1/2}} - \frac{d\xi}{(1 - \xi^2)^{1/2}}$$

Mamy następujące rozwiązania:

Elipsa $a > 0$, $e < 1$, $\xi = \cos E$

$$\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{1/2} a^{-3/2} (t - t_0) = \arccos(\xi) - e(1 - \xi^2)^{1/2} = E - e \sin E$$

Hiperbola $a < 0$, $e > 1$, $\xi = \cosh(F)$

$$\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{1/2} |a|^{-3/2} (t - t_0) = -\operatorname{arccosh}(\xi) + e(\xi^2 - 1)^{1/2} = e \sinh F - F$$

Dla paraboli

$$\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{1/2} (t - t_0) = \frac{1}{3}(r + p)(2r - p)^{1/2}$$

Ruch po paraboli

Dla ruchu po paraboli najwygodniej jest skorzystać z faktu, że energia całkowita w układzie środka masy równa jest zero i korzystamy z zachowania momentu pędu.

Pamiętamy, że $p=2q$ (q - odległość w perycentrum)

$$\mu r^2 \dot{\vartheta} = \sqrt{p\mu\gamma}$$

$$r = \frac{p}{1 + \cos(\vartheta)} = \frac{q}{\cos^2(\frac{\vartheta}{2})}$$

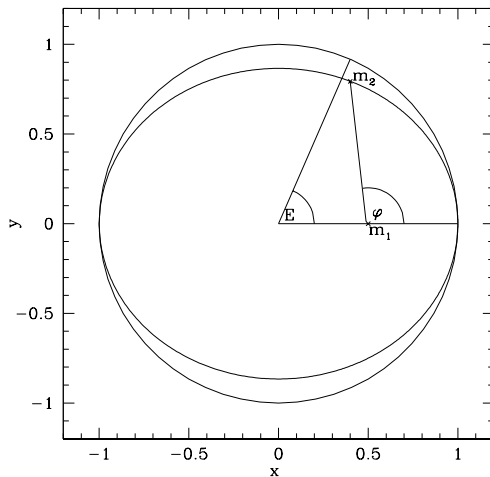
$$q^2 \sec^4(\frac{\vartheta}{2}) d\vartheta = \sqrt{2q\frac{\gamma}{\mu}} dt$$

$$\left(1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\vartheta}{2})\right) d(\operatorname{tg}(\frac{\vartheta}{2})) = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{2\mu}q^{3/2}} dt$$

jeżeli jako moment t_0 określimy przejście przez perycentrum to otrzymamy równanie Bakera

$$\operatorname{tg}(\frac{\vartheta}{2}) + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3(\frac{\vartheta}{2}) = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{2\mu}q^{3/2}} (t - t_0)$$

Określenie anomalii mimośrodowej E i anomalii prawdziwej φ dla elipsy



Związek anomalii mimośrodowej E i anomalii prawdziwej ϑ dla elipsy

$$r \cos \vartheta = a(\cos E - e)$$

$$r \sin \vartheta = b \sin E = a(1 - e^2)^{1/2} \sin E$$

Pozwala to na otrzymanie następujących zależności:

$$\cos \vartheta = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\left(\frac{E}{2}\right)$$

Związek hiperbolicznej anomalii mimośrodowej F i anomalii prawdziwej ϑ dla hiperboli

Z definicji hiperbolicznej anomalii mimośrodowej i równania hiperboli we współrzędnych biegunowych możemy otrzymać:

$$\cos \vartheta = \frac{e - \cosh F}{e \cosh F - 1}$$

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sinh F}{e \cosh F - 1}$$

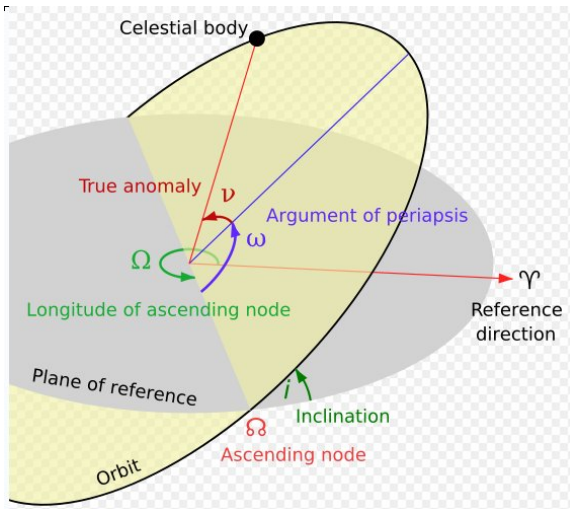
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tgh}\left(\frac{F}{2}\right)$$

Stałe ruchu względnego w zagadnieniu dwóch ciał

Mamy sześć stałych ruchu dla ruchu względnego dwóch ciał:
W rozwiązaniu z poprzedniego wykładu były to

- ▶ Energia liczona w układzie środka masy
- ▶ trzy składowe momentu pędu liczone względem środka masy
- ▶ kąt ϑ_0 , który przyjęliśmy 0 dla najmniejszej odległości pomiędzy obu ciałami.
- ▶ wyróżniony moment czasu w którym $\vartheta = \vartheta_0$

Elementy orbity eliptycznej



Rysunek: Elementy orbity: rozmiar wielkiej półosi, mimośród, nachylenie płaszczyzny orbity do płaszczyzny ekliptyki, długość węzła wstępującego, odległość perycentrum od węzła wstępującego, moment przejścia przez perycentrum

Elementy orbity eliptycznej c. d.

Ze względów praktycznych związanych z obserwacjami za sześć stałych ruchu względnego w zagadnieniu dwóch ciał najczęściej przyjmujemy:

- ▶ a - wielka półoś orbity
- ▶ e - mimośród orbity
- ▶ i - nachylenie orbity do wyróżnionej płaszczyzny (dla orbit wokółsłonecznych jest to płaszczyzna ekliptyki)
- ▶ Ω - długość węzła wstępującego (dla orbit wokółsłonecznych odległość węzła wstępującego od punktu Barana)
- ▶ ω - odległość perycentrum od węzła wstępującego
- ▶ t_0 - moment przejścia przez perycentrum

Czasem użyteczne jest korzystanie z długości perycentrum

$$\pi = \omega + \Omega.$$

W związku z tym oprócz anomalii prawdziwej θ możemy się spotkać z argumentem szerokości $u = \theta + \omega$ i prawdziwą długością orbitalną

$$l = \theta + \omega + \Omega = \theta + \pi$$