

Wykład 4: Wyznaczanie elementów orbity ciała na podstawie trzech obserwacji

16.03.2020

Ile obserwacji jest potrzebnych do wyznaczenia 6 elementów orbity?

- ▶ Mamy znaleźć 6 elementów orbity ciała.
- ▶ Jedna obserwacja daje nam tylko współrzędne obiektu (najczęściej równikowe równonocne).
- ▶ Potrzebujemy więc trzech obserwacji (α_i, δ_i dla trzech epok t_i)

Dane początkowe

- ▶ Dla trzech czasów t_1, t_2, t_3 mamy dane współrzędne obiektu (rektascensja, deklinacja) $(\alpha_1, \delta_1), (\alpha_2, \delta_2), (\alpha_3, \delta_3)$ i trzy położenia Słońca względem Ziemi $(x_{\odot i}, y_{\odot i}, z_{\odot i}), i = 1, 2, 3$.
- ▶ Dla każdej obserwacji obiektu możemy wyznaczyć trzy cosinusy kierunkowe l, m, n (x_p, y_p, z_p - współrzędne ciała względem Ziemi w układzie równikowym równonocnym, Δ - odległość ciała od Ziemi, ξ, η, ζ - współrzędne ciała względem Słońca).

$$x_p = \Delta \cos(\alpha) \cos(\delta) = l\Delta = x_{\odot} + \xi$$

$$y_p = \Delta \sin(\alpha) \cos(\delta) = m\Delta = y_{\odot} + \eta$$

$$z_p = \Delta \sin(\delta) = n\Delta = z_{\odot} + \zeta$$

Powierzchnie trójkątów

Zakładamy położenie Słońca w punkcie O , a dla trzech czasów obiekt znajduje się w punktach P_1, P_2, P_3 wyznaczonych przez wektory położenia $\vec{r}_i = \vec{OP}_i$. Ruch odbywa się w jednej płaszczyźnie, więc wektor $\vec{r}_2$ możemy wyrazić przez sumę wektorów $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_3$

$$\vec{r}_2 = a_1 \vec{r}_1 + a_3 \vec{r}_3$$

mnożąc wektorowo przez $\vec{r}_1$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = a_3 \vec{r}_1 \times \vec{r}_3$$

mnożąc wektorowo przez $\vec{r}_3$

$$\vec{r}_3 \times \vec{r}_2 = a_1 \vec{r}_3 \times \vec{r}_1$$

Powierzchnie trójkątów c.d.

A_1 - pole trójkąta OP_2P_3

A_2 - pole trójkąta OP_1P_3 (największe)

A_3 - pole trójkąta OP_1P_2

$$A_3 = a_3 A_2 \Rightarrow a_3 = \frac{A_3}{A_2}$$

$$A_1 = a_1 A_2 \Rightarrow a_1 = \frac{A_1}{A_2}$$

$$A_2 \vec{r}_2 = A_1 \vec{r}_1 + A_3 \vec{r}_3$$

Powierzchnie sektorów

Pomiędzy wektorami r_1 i r_2 mamy sektor B_3 ,

Pomiędzy wektorami r_2 i r_3 mamy sektor B_1 ,

Pomiędzy wektorami r_1 i r_3 mamy sektor B_2 ,

$$\tau_1 = t_3 - t_2$$

$$\tau_2 = t_3 - t_1$$

$$\tau_3 = t_2 - t_1$$

Powierzchnie sektorów B_i proporcjonalna są do τ_i (stała prędkość polowa ruchu po orbicie).

$$b_1 = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}$$

$$b_3 = \frac{B_3}{B_2} = \frac{\tau_3}{\tau_2}$$

Równania na odległości od Słońca i od Ziemi

$$\xi_2 = a_1 \xi_1 + a_3 \xi_3$$

$$\eta_2 = a_1 \eta_1 + a_3 \eta_3$$

$$\zeta_2 = a_1 \zeta_1 + a_3 \zeta_3$$

$$l_1 a_1 \Delta_1 - l_2 \Delta_2 + l_3 a_3 \Delta_3 = a_1 x_{\odot 1} - x_{\odot 2} + a_3 x_{\odot 3}$$

$$m_1 a_1 \Delta_1 - m_2 \Delta_2 + m_3 a_3 \Delta_3 = a_1 y_{\odot 1} - y_{\odot 2} + a_3 y_{\odot 3}$$

$$n_1 a_1 \Delta_1 - n_2 \Delta_2 + n_3 a_3 \Delta_3 = a_1 z_{\odot 1} - z_{\odot 2} + a_3 z_{\odot 3}$$

Pierwsza iteracja

W zerowym przybliżeniu podstawiamy $a_1 = b_1$ i $a_3 = b_3$ i rozwiązujemy równanie na Δ_i , $i = 1, 2, 3$. a następnie

$$\xi_1 = l_1 \Delta_1 - x_{\odot 1}$$

$$\eta_1 = m_1 \Delta_1 - y_{\odot 1}$$

$$\zeta_1 = n_1 \Delta_1 - z_{\odot 1}$$

i.t.d.

Wygodne jednostki

Jednostka astronomiczna: promień kołowej orbity na której ciało o znikomej masie porusza się wokół Słońca s prędkością kątową $k = 0.0172\ 02\ 098\ 95\ rad/d$ lub $0.985607\ 668\ 6$ stopni na dobę.

Długość jednostki astronomicznej wynosi $1.49597870 \cdot 10^{11}$ m.

Jeżeli przyrównamy siłę dośrodkową w ruchu po okręgu z siłą grawitacji otrzymamy

$$ak^2 = \frac{GM}{a^2}$$

i

$$GM = k^2 a^3$$

Jeżeli jako jednostkę długości przyjmiemy jednostkę astronomiczną, a za jednostkę czasu $1/k = 58.132\ 440\ 87$ d. możemy równania ruchu zapisać w najprostszy sposób

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r} = -k^2\frac{a^3}{r^3}\vec{r} = -\frac{1}{r^3}\vec{r}$$

Zmiany pozycji obiektu

Liczymy zmiany położenia w płaszczyźnie orbity obiektu

$$\ddot{x} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\ddot{y} = -\frac{y}{r^3}$$

$$\delta x = \dot{x}\delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}(\delta t)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dt^3}(\delta t)^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^4x}{dt^4}(\delta t)^4 + \dots$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{3x\dot{r}}{r^4} - \frac{\dot{x}}{r^3}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = 3\left(\frac{\dot{x}\dot{r}}{r^4} + \frac{x\ddot{r}}{r^4} - \frac{4x\dot{r}^2}{r^5}\right) - \frac{r^3\ddot{x} - 3r^2\dot{x}\dot{r}}{r^6}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = x\left(\frac{1}{r^6} - \frac{12\dot{r}^2}{r^5} + \frac{3\ddot{r}}{r^4}\right) + \frac{6\dot{x}\dot{r}}{r^4}$$

Zmiany x i y zapisujemy w ten sam sposób

$$x + \delta x = Fx + G\dot{x}$$

$$y + \delta y = Fy + G\dot{y}$$

$$F = 1 - \frac{1}{2r^3}(\delta t)^2 + \frac{\dot{r}}{2r^4}(\delta t)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{1}{r^6} - \frac{12\dot{r}^2}{r^5} + \frac{3\ddot{r}}{r^4} \right) (\delta t)^4$$

$$G = \delta t - \frac{1}{6r^3}(\delta t)^3 + \frac{\dot{r}}{4r^4}(\delta t)^4$$

i odpowiednie wartości na x_3 , y_3 i x_1 , y_1 mają następującą postać

$$x_3 = F_1 x_2 + G_1 \dot{x}_2 \quad y_3 = F_1 y_2 + G_1 \dot{y}_2$$

$$x_1 = F_3 x_2 + G_3 \dot{x}_2 \quad y_1 = F_3 y_2 + G_3 \dot{y}_2$$

gdzie F_1 i G_1 są wartościami $F(\delta t = \tau_1)$ i $G(\delta t = \tau_1)$, a F_3 i G_3 to $F(\delta t = -\tau_3)$ i $G(\delta t = -\tau_3)$

Powierzchnie trójkątów i sektorów

$$A_1 = \frac{1}{2}(x_2 y_3 - y_2 x_3)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(x_1 y_3 - y_1 x_3)$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{p} = \frac{1}{2}(x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) = \frac{1}{2}(x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2) = \frac{1}{2}(x_3 \dot{y}_3 - y_3 \dot{x}_3)$$

Gdy podstawimy do wzorów na A_i wzory na x_1, x_3, y_1, y_3 otrzymamy:

$$A_1 = \frac{1}{2} G_1 \sqrt{p}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (F_3 G_1 - G_3 F_1) \sqrt{p}$$

$$A_3 = -\frac{1}{2} G_3 \sqrt{p}$$

Poprawianie wartości a_1 i a_3 .

Uwzględniając wyrazy do trzeciego stopnia w τ_i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{p}\tau_1 \left(1 - \frac{\tau_1^2}{6r_2^3}\right) \\A_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{p}\tau_2 \left(1 - \frac{\tau_2^2}{6r_2^3}\right) \\A_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{p}\tau_3 \left(1 - \frac{\tau_3^2}{6r_2^3}\right)\end{aligned}$$

Otrzymujemy stąd poprawione wartości na a_1 i a_3

$$a_1 = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left(1 - \frac{\tau_1^2}{6r_2^3}\right) \left(1 - \frac{\tau_2^2}{6r_2^3}\right)^{-1} \approx \frac{\tau_1}{\tau_2} \left(1 + \frac{(\tau_2^2 - \tau_1^2)}{6r_2^3}\right)$$

i odpowiednio a_3

stąd pamiętając, że $\tau_3 = \tau_2 - \tau_1$ i $\tau_1 = \tau_2 - \tau_3$

$$\begin{aligned}a_1 &\approx \frac{\tau_1}{\tau_2} \left(1 + \frac{\tau_3(\tau_2 + \tau_1)}{6r_2^3}\right) = b_1 + \frac{\tau_1\tau_3}{6r_2^3}(1 + b_1) \\a_3 &\approx \frac{\tau_3}{\tau_2} \left(1 + \frac{\tau_1(\tau_2 + \tau_3)}{6r_2^3}\right) = b_3 + \frac{\tau_1\tau_3}{6r_2^3}(1 + b_3)\end{aligned}$$

Poprawka obejmująca $\dot{r}$ (podana bez wyprowadzenia)

- ▶ Z otrzymanych trzech położeń ciała względem Słońca mamy r_1 , r_2 i r_3
- ▶ Dopasujemy zależność drugiego stopnia $r = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ i liczymy $\dot{r}_2 = c_1 + 2c_2 t_2$
- ▶ Uwzględniając człony w F i G zawierające $\dot{r}$ otrzymujemy:

$$A_1 = \frac{1}{2} \sqrt{p} \tau_1 \left(1 - \frac{\tau_1^2}{6r_2^3} + \frac{\tau_1^3}{4r_2^4} \dot{r}_2 \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \sqrt{p} \tau_2 \left(1 - \frac{\tau_2^2}{6r_2^3} + \frac{\tau_2^2(\tau_1 - \tau_3)}{4r_2^4} \dot{r}_2 \right)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \sqrt{p} \tau_3 \left(1 - \frac{\tau_3^2}{6r_2^3} - \frac{\tau_3^3}{4r_2^4} \dot{r}_2 \right)$$

Poprawione wartości a_1 i a_3

Poprawione wartości współczynników a_1 i a_2 wynoszą:

$$a_1 = A_1/A_2 = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left(1 + \frac{\tau_3(\tau_2 + \tau_1)}{6r_2^3} + \frac{\tau_3(\tau_3(\tau_1 + \tau_3) - \tau_1^2)}{4r_2^4} \dot{r}_2 \right)$$

$$a_3 = A_3/A_2 = \frac{\tau_3}{\tau_2} \left(1 + \frac{\tau_1(\tau_2 + \tau_3)}{6r_2^3} - \frac{\tau_1(\tau_1(\tau_1 + \tau_3) - \tau_3^2)}{4r_2^4} \dot{r}_2 \right)$$

Poprawione wartości a_1 i a_3 możemy wstawić do układu równań na odległości planetoidy od Ziemi i iterować.

Przy założeniu, że rozwiązanie będzie zbieżne możemy wyznaczać teraz kolejne elementy orbity

Stosunki pól wycinków elipsy i trójkątów

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$2f_3 = \vartheta_2 - \vartheta_1$$

$$2F_3 = \vartheta_2 + \vartheta_1$$

$$2g_3 = E_2 - E_1$$

$$2G_3 = E_2 + E_1$$

Będziemy korzystać z następujących wzorów:

$$r \cos(\vartheta) = a(\cos(E) - e)$$

$$\frac{2\pi}{P}(t - T) = E - e \sin(E)$$

i poprzez trzecie prawo Keplera:

$$E - e \sin(E) = \frac{t - T}{a^{3/2}}$$

Równanie na R_3 c.d.

Stosunek powierzchni sektora B_3 do trójkąta A_3 : $R_3 = B_3/A_3$

$$R_3 = \frac{\sqrt{\bar{p}}\tau_3}{r_1 r_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)} = \frac{\sqrt{\bar{p}}\tau_3}{r_1 r_2 \sin(2f)}$$

Plan działania

1. Mamy trzy obserwacje (t, α, δ)
2. Obliczamy, lub odszukujemy współrzędne Słońca dla trzech momentów czasu.
3. Obliczamy kosinusy kierunkowe planety
4. Obliczamy w pierwszym przybliżeniu odległości geocentryczne ($a_1 = b_1, a_3 = b_3$).
5. Obliczamy odległości heliocentryczne
6. Poprawiamy a_1 i a_3 i wracamy do punktu 5
7. Robimy poprawki na czas potrzebny na przebycie przez światło odległości pomiędzy nami a planetą (wracamy do punktu 2)

Obliczamy parametr orbity

$$\cos 2f_3 = \frac{\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2}{r_1 r_2}$$

Ze wzoru

$$R_3 = \frac{\sqrt{p} \tau_3}{r_1 r_2 \sin(2f)}$$

obliczamy

$$p = \frac{R_3^2 \cdot r_1^2 r_2^2 \sin^2(2f)}{\tau_3^2}$$

Mimośród orbity i kąty anomalii prawdziwej

Z równania biegunowego elipsy możemy skorzystać dla dwóch momentów czasu:

$$e \cos \vartheta_1 = \frac{p}{r_1} - 1$$

i

$$e \cdot \cos(\vartheta_1 + 2f_2) = e(\cos \vartheta_1 \cos 2f_2 - \sin \vartheta_1 \sin 2f_2) = \frac{p}{r_3} - 1$$

z tego drugiego równania (z wykorzystaniem pierwszego możemy zapisać:

$$e \sin \vartheta_1 = \frac{(\frac{p}{r_1} - 1) \cos 2f_2 - (\frac{p}{r_3} - 1)}{\sin 2f_2}$$

Rozwiązujemy równania na $e \cos \vartheta_1$ i $e \sin \vartheta_1$ i otrzymujemy e oraz ϑ_1 a znając wartości f_3 i f_2 znajdziemy również ϑ_2 ϑ_3 .

Wielka półoś orbity i moment przejścia przez peryhelium

- ▶ Znając p i e otrzymujemy również wielką półoś elipsy $a = \frac{p}{1-e^2}$ i okres orbitalny P .
- ▶ Z zależności pomiędzy cosinusem anomalii mimośrodowej i anomalią prawdziwą oraz z równania Keplera otrzymujemy moment przejścia przez peryhelium

$$\cos E = \frac{\cos \vartheta + e}{1 + e \cos \vartheta}$$

$$t_0 = t_1 - \frac{P}{2\pi}(E_1 - e \sin E_1)$$

Obliczanie elementów macierzy P i Q

Możemy skorzystać z elementów macierzy przejścia pomiędzy układem związanym z płaszczyzną orbity o osi x skierowanej do perycentrum i układem równikowym o osi ξ skierowanej do punkty Barana.

$$\xi_1 = P_x x_1 + Q_x y_1$$

$$\xi_3 = P_x x_3 + Q_x y_3$$

Wyznaczamy z tych dwóch równań wartości P_x i Q_x

$$P_x = \frac{\xi_3 y_1 - \xi_1 y_3}{y_1 x_3 - y_3 x_1} = \frac{\xi_1 r_3 \sin \vartheta_3 - \xi_3 r_1 \sin \vartheta_1}{r_1 r_3 \sin 2f_2}$$

$$Q_x = \frac{\xi_3 x_1 - \xi_1 x_3}{y_3 x_1 - y_1 x_3} = \frac{\xi_3 r_1 \cos \vartheta_1 - \xi_1 r_3 \cos \vartheta_3}{r_1 r_3 \sin 2f_2}$$

Obliczanie elementów macierzy P i Q c.d.

W analogiczny sposób znajdujemy wartości pozostałych elementów P i Q .

$$P_y = \frac{\eta_1 r_3 \sin \vartheta_3 - \eta_3 r_1 \sin \vartheta_1}{r_1 r_3 \sin 2f_2}$$

$$Q_y = \frac{\eta_3 r_1 \cos \vartheta_1 - \eta_1 r_3 \cos \vartheta_3}{r_1 r_3 \sin 2f_2}$$

$$P_z = \frac{\zeta_1 r_3 \sin \vartheta_3 - \zeta_3 r_1 \sin \vartheta_1}{r_1 r_3 \sin 2f_2}$$

$$Q_z = \frac{\zeta_3 r_1 \cos \vartheta_1 - \zeta_1 r_3 \cos \vartheta_3}{r_1 r_3 \sin 2f_2}$$

Obliczanie elementów orbity

Można sprawdzić, że:

$$\sin \omega \sin i = P_z \cos \epsilon - P_y \sin \epsilon$$

$$\cos \omega \sin i = Q_z \cos \epsilon - Q_y \sin \epsilon$$

Z tych zależności otrzymujemy ω , a Ω z dwóch kolejnych

$$\sin \Omega = (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \frac{1}{\cos \epsilon}$$

$$\cos \Omega = (P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega)$$

na koniec

$$\cos i = -(P_x \sin \omega + Q_x \cos \omega) \frac{1}{\sin \Omega}$$