

Wykład 5 - Całki ruchu zagadnienia n ciał,
funkcja perturbacyjna dla ruchu keplerowskiego,
sfery działania planet.

30.03.2020

Układ n ciał przyciągających się siłami grawitacji

Mamy n ciał przyciągających się siłami grawitacji.

Masy ciał oznaczamy m_i .

Współrzędne ciał w układzie inercyjnym oznaczamy ξ_i, η_i, ζ_i .

Równania ruchu:

$$m_i \ddot{\xi}_i = -Gm_i \sum_{j=1, j \neq i}^n m_j \frac{\xi_i - \xi_j}{r_{ij}^3}$$

$$m_i \ddot{\eta}_i = -Gm_i \sum_{j=1, j \neq i}^n m_j \frac{\eta_i - \eta_j}{r_{ij}^3}$$

$$m_i \ddot{\zeta}_i = -Gm_i \sum_{j=1, j \neq i}^n m_j \frac{\zeta_i - \zeta_j}{r_{ij}^3}$$

Stałe ruchu układu n ciał

Mamy $3n$ równań drugiego stopnia dla $3n$ zmiennych - do ich rozwiązania potrzebnych jest $6n$ stałych ruchu.

Kolejno sumując n - równań otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\xi}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\eta}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\zeta}_i = 0$$

a całkując po czasie

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\xi}_i = a_1, \quad \sum_{i=1}^n m_i \dot{\eta}_i = a_2, \quad \sum_{i=1}^n m_i \dot{\zeta}_i = a_3$$

Ruch środka masu układu n - ciał

$$\sum_{i=1}^n m_i \xi_i = a_1 t + b_1$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \eta_i = a_2 t + b_2$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \zeta_i = a_3 t + b_3$$

Ruch środka masu układu n - ciał

Jeżeli masa układu jest równa $M = \sum_{i=1}^n m_i$ to

$$\xi_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \xi_i$$

$$\eta_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \eta_i$$

$$\zeta_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \zeta_i$$

- ▶ Barycentrum układu n punktów oddziałujących grawitacyjnie porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.
- ▶ Równania w układzie środka masy mają taką samą postać jak w dowolnym układzie inercyjnym.

Potencjał wzajemnego oddziaływania

$$U = \frac{1}{2}G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i} = Gm_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j}{r_{ij}} = -Gm_i \sum_{j=1, j \neq i}^n m_j \frac{\xi_i - \xi_j}{r_{ij}^3}$$

Możemy podobnie zapisać $\partial U / \partial \eta_i$ i $\partial U / \partial \zeta_i$, co pozwoli nam zapisać równania ruchu w postaci:

$$m_i \ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i \ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i \ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}$$

Całki pól

Zapisujemy równania ruchu w układzie środka masy i mnożymy równania na $\ddot{\zeta}_i$ przez η_i , a równania na $\ddot{\eta}_i$ przez ζ_i i odejmujemy je od siebie stronami.

$$m_i(\eta_i\ddot{\zeta}_i - \zeta_i\ddot{\eta}_i) = -Gm_i \sum_{j=1}^n m_j \frac{\eta_i(\zeta_i - \zeta_j) - \zeta_i(\eta_i - \eta_j)}{r_{ij}^3}$$

$$m_i(\eta_i\ddot{\zeta}_i - \zeta_i\ddot{\eta}_i) = Gm_i \sum_{j=1}^n m_j \frac{\eta_i\zeta_j - \zeta_i\eta_j}{r_{ij}^3}$$

Zapisujemy analogiczne równania dla par współrzędnych ζ_i, ξ_i i ξ_i, η_i . Przy sumowaniu po i sumy po prawych stronach równań są równe "0" (wyrazy sum znoszą się parami bowiem każdej parze wartości i, j odpowiada para j, i).

Całki pól c. d.

Otrzymujemy trzy równania:

$$\sum_{i=1}^n m_i (\eta_i \ddot{\zeta}_i - \zeta_i \ddot{\eta}_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (\zeta_i \ddot{\xi}_i - \xi_i \ddot{\zeta}_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (\xi_i \ddot{\eta}_i - \eta_i \ddot{\xi}_i) = 0$$

Całkując je otrzymujemy trzy całki zwane całkami pól:

Całki pól c. d.

$$\sum_{i=1}^n m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i) = c_1$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (\zeta_i \dot{\xi}_i - \xi_i \dot{\zeta}_i) = c_2$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) = c_3$$

Lewe strony równań przedstawiają ogólne momenty pędów układu n punktów materialnych względem osi współrzędnych. Wyrażenia w nawiasach są rzutami prędkości polowej poszczególnych punktów materialnych na trzy fundamentalne płaszczyzny układu współrzędnych ξ , η , ζ .

Całka energii.

Mnożymy równania

$$m_i \ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i \ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i \ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}$$

odpowiednio przez $\dot{\xi}_i$, $\dot{\eta}_i$, $\dot{\zeta}_i$, dodajemy do siebie stronami i sumujemy po "i" aby otrzymać

$$\sum_{i=1}^n m_i (\dot{\xi}_i \ddot{\xi}_i + \dot{\eta}_i \ddot{\eta}_i + \dot{\zeta}_i \ddot{\zeta}_i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \dot{\eta}_i + \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \dot{\zeta}_i \right)$$

Całkując te równanie po czasie (prawa strona jest równa dU/dt) otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = U + h$$

h - stała całkowania, U - energia potencjalna względem środka masy $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2)$ - energia kinetyczna.

Stałe równań ruchu w zagadnieniu n ciał

- ▶ W zagadnieniu n ciał znamy 10 stałych ruchu (potrzebujemy $6n$).
- ▶ Zagadnienie ruchu trzech ciał umiemy całkować tylko w szczególnych przypadkach.
- ▶ Heinrich Bruns w 1887 r. udowodnił, że we współrzędnych prostokątnych pokazane przez nas 10 całek jest jedynymi niezależnymi algebraicznymi całkami ruchu ogólnego zagadnienia trzech ciał.
- ▶ Pomimo, że zagadnienia n ciał (a nawet trzech ciał) nie możemy rozwiązać w sposób ścisły to ruchy ciał w Układzie Słonecznym potrafimy przewidzieć w stosunkowo niedługich interwałach czasu posługując się metodami numerycznymi, metodami analitycznymi teorii perturbacji lub rozwijaniem na szeregi.

Równania ruchu względnego n ciał

Zakładamy, że ciało n posiada największą masę i względem niego będziemy rozpatrywać ruch pozostałych ciał.

$$x_i = \xi_i - \xi_n \quad y_i = \eta_i - \eta_n \quad z_i = \zeta_i - \zeta_n$$

Z równań ruchu otrzymamy:

$$m_i \ddot{\xi}_i = -k^2 m_i \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} m_j \frac{\xi_i - \xi_j}{r_{ij}^3} - k^2 m_i m_n \frac{\xi_i - \xi_n}{r_{in}^3}$$

i analogiczne wyrażenia na $m_i \ddot{\eta}_i$ i $m_i \ddot{\zeta}_i$

Równania ruchu względnego n ciał c. d.

$$\ddot{x}_i + \ddot{\xi}_n = -k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} m_j \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^3} - k^2 m_n \frac{x_i}{r_{in}^3}$$

$$\ddot{y}_i + \ddot{\eta}_n = -k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} m_j \frac{y_i - y_j}{r_{ij}^3} - k^2 m_n \frac{y_i}{r_{in}^3}$$

$$\ddot{z}_i + \ddot{\zeta}_n = -k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} m_j \frac{z_i - z_j}{r_{ij}^3} - k^2 m_n \frac{z_i}{r_{in}^3}$$

natomiast:

$$\ddot{\xi}_n = k^2 \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{x_j}{r_{jn}^3} \quad \ddot{\eta}_n = k^2 \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{y_j}{r_{jn}^3} \quad \ddot{\zeta}_n = k^2 \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{z_j}{r_{jn}^3}$$

Równania ruchu względnego n ciał c. d.

Podstawiając i wydzielając w prawych stronach równań ruchu wyraz w którym $j = i$, otrzymujemy (po prawej stronie sumujemy po $j \neq i$, $x_n = 0$) :

$$\ddot{x}_i + k^2(m_n + m_i)\frac{x_i}{r_{in}^3} = -k^2 \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^3} - k^2 \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{x_j}{r_{jn}^3}$$

$$\ddot{y}_i + k^2(m_n + m_i)\frac{y_i}{r_{in}^3} = -k^2 \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{y_i - y_j}{r_{ij}^3} - k^2 \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{y_j}{r_{jn}^3}$$

$$\ddot{z}_i + k^2(m_n + m_i)\frac{z_i}{r_{in}^3} = -k^2 \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{z_i - z_j}{r_{ij}^3} - k^2 \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{z_j}{r_{jn}^3}$$

Funkcja perturbacyjna i równania ruchu względnego

Wprowadzając funkcję nazywaną funkcją perturbacyjną

$$R_{ij} = k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} m_j \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_{jn}^3} \right)$$

możemy równania ruchu względnego zapisać w postaci:

$$\ddot{x}_i + k^2(m_n + m_i) \frac{x_i}{r_{in}^3} = \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_i}$$

$$\ddot{y}_i + k^2(m_n + m_i) \frac{y_i}{r_{in}^3} = \frac{\partial R_{ij}}{\partial y_i}$$

$$\ddot{z}_i + k^2(m_n + m_i) \frac{z_i}{r_{in}^3} = \frac{\partial R_{ij}}{\partial z_i}$$

($i=1,2, \dots, n-1, i \neq j$)

Funkcja perturbacyjna i równania ruchu względnego

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k^2(m_n + m_i)}{r_{in}} + R_{ij} \right)$$

$$\ddot{y}_i = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{k^2(m_n + m_i)}{r_{in}} + R_{ij} \right)$$

$$\ddot{z}_i = \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{k^2(m_n + m_i)}{r_{in}} + R_{ij} \right)$$

Jeżeli masy wszystkich punktów materialnych m_j (oprócz m_n i m_i) są równe zero, to $R_{ij} = 0$ i równania opisują ruch keplerowski. Wszystkie odchylenia od ruchu keplerowskiego wynikają z obecności R_{ij} .

Perturbacje w Układzie Słonecznym

- ▶ Masa Słońca jest około 700 razy większa od sumy mas wszystkich planet
- ▶ Najmasywniejsza planeta, Jowisz ma masę ok 1000 razy mniejszą niż Słońce (ale 318 razy większą niż Ziemia).
- ▶ Siła przyciągania grawitacyjnego Ziemi przez Jowisza nie przekracza $1/17000$ siły przyciągania grawitacyjnego Słońca.
- ▶ W przypadku Marsa nie przekracza $1/6000$, a w przypadku Saturna $1/250$
- ▶ Orbity planet będą opisywane jako perturbowane orbity keplerowskie

Orbita oskulacyjna i orbita pośrednia

- ▶ Orbita oskulacyjna - orbita keplerowska na której w danej chwili czasu ciało posiada takie samo położenie i prędkość jak na orbicie rzeczywistej.
- ▶ Orbita pośrednia - orbita keplerowska na której w danej chwili czasu ciało posiada takie samo położenie jak na orbicie prawdziwej, natomiast ruch rzeczywisty i ruch keplerowski mają różne prędkości

Grawitacyjne sfery planet

Co mamy zrobić w sytuacji, gdy obliczamy orbity księżyców względem planet, lub orbitę planetoidy, która zbliża się do planety. Kiedy powinniśmy traktować ruch ciała względem planety za perturbowany przez Słońce a kiedy jako ruch orbitalny względem Słońca z perturbowany przez planetę?

Grawitacyjne sfery planet - przypadek poglądowy

Rozważmy Słońce (masa = 1), planetę o masie m i punkt materialny P o pomijalnej masie.

r - odległość punktu P od Słońca

r_1 - odległość planety od Słońca

Δ - odległość punktu P od planety

$$\Delta^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

Równania ruchu punktu P możemy zapisać jako

$$\ddot{x} + k^2 \frac{x}{r^3} = k^2 m \left(\frac{x_1 - x}{\Delta^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right)$$

analogicznie dla $\ddot{y}$ i $\ddot{z}$

Grawitacyjne sfery planet c.d.

Równania niezakłóconego ruchu heliocentrycznego planety mają postać:

$$\ddot{x}_1 + k^2 \frac{x_1}{r_1^3} = 0$$

i analogicznie dla $\ddot{y}_1$ i $\ddot{z}_1$

Przyjmujemy środek planety za początek nowego prostokątnego układu współrzędnych ξ, η, ζ o osiach równoległych do układu x, y, z .

$$\xi = x - x_1 \qquad \eta = y - y_1 \qquad \zeta = z - z_1$$

Równania ruchu punktu P względem planety będą miały postać (odejmujemy od równania ruchu punktu P względem Słońca równanie ruchu planety względem Słońca):

$$\ddot{\xi} + k^2 m \frac{\xi}{\Delta^3} = k^2 \left(\frac{x_1}{r_1^3} - \frac{x}{r^3} \right)$$

i analogicznie dla η i ζ

Grawitacyjne sfery planet c.d.

Wprowadzimy następujące wielkości:

R – przyspieszenie pochodzące od Słońca w układzie związanym ze Słońcem.

F – przyspieszenie pochodzące od planety w układzie związanym ze Słońcem.

R_1 – przyspieszenie pochodzące od planety w układzie związanym z planetą.

F_1 – przyspieszenie pochodzące od Słońca w układzie związanym z planetą.

$$R = \frac{k^2}{r^2}$$

$$R_1 = \frac{k^2 m}{\Delta^2}$$

$$F = k^2 m \left[\left(\frac{x_1 - x}{\Delta^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right)^2 + \left(\frac{y_1 - y}{\Delta^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right)^2 + \left(\frac{z_1 - z}{\Delta^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$F_1 = k^2 \left[\left(\frac{x_1}{r_1^3} - \frac{x}{r^3} \right)^2 + \left(\frac{y_1}{r_1^3} - \frac{y}{r^3} \right)^2 + \left(\frac{z_1}{r_1^3} - \frac{z}{r^3} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Przyjmujemy założenie, że sfera działania planety będzie ograniczona powierzchnią na której

$$\frac{F}{R} = \frac{F_1}{R_1}$$

Grawitacyjne sfery planet c.d.

Pamiętając, że

$$\frac{(x_1 - x)^2}{\Delta^6} + \frac{(y_1 - y)^2}{\Delta^6} + \frac{(z_1 - z)^2}{\Delta^6} = \frac{1}{\Delta^4}$$

i

$$\frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{r_1^6} = \frac{1}{r_1^4}$$

otrzymujemy:

$$F = k^2 m \left[\frac{1}{\Delta^4} + \frac{1}{r_1^4} + 2 \frac{(x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta)}{\Delta^3 r_1^3} \right]^{1/2}$$

i

$$F_1 = k^2 \left[\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r_1^4} - 2 \frac{(x_1 x + y_1 y + z_1 z)}{r^3 r_1^3} \right]^{1/2}$$

Grawitacyjne sfery planet c.d.

Gdy wprowadzimy kąt ϕ o wierzchołku w planecie z ramionami skierowanymi na Słońce i punkt P , oraz wprowadzimy parametr $u = \Delta/r_1$ będziemy mogli zapisać

$$\cos \phi = -\frac{x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta}{r_1\Delta}$$

oraz

$$x_1x + y_1y + z_1z = x_1(x_1 + \xi) + y_1(y_1 + \eta) + z_1(z_1 + \zeta) = r_1^2(1 - u \cos \phi)$$

$$r^2 = (x_1 + \xi)^2 + (y_1 + \eta)^2 + (z_1 + \zeta)^2 = r_1^2(1 - 2u \cos \phi + u^2)$$

Grawitacyjne sfery planet c.d.

$$F = \frac{k^2 m}{\Delta^2} (1 - 2u^2 \cos \phi + u^4)^{1/2}$$

i

$$F_1 = \frac{k^2 u^2 [1 + (1 - 2u \cos \phi + u^2)^2 - 2U]^{\frac{1}{2}}}{\Delta^2 (1 - 2u \cos \phi + u^2)}$$

$$U = (1 - u \cos \phi)(1 - 2u \cos \phi + u^2)^{1/2}.$$

Biorąc pod uwagę, że w naszym zagadnieniu wielkość u powinna być mała możemy zapisać:

$$R = \frac{k^2}{r_1^2}$$

$$F = R_1 = \frac{k^2 m}{\Delta^2}$$

$$F_1 = \frac{k^2 \Delta}{r_1^3} (1 + 3 \cos^2 \phi)^{1/2}$$

Grawitacyjne sfery planet c.d.

Wewnątrz sfery działania o "promieniu" Δ_1 $F/R > F_1/R_1$

$$\Delta_1 = r_1 \left[\frac{m^2}{(1 + 3 \cos^2 \phi)^{1/2}} \right]^{1/5}$$

Rozmiary sfery działania można porównać z rozmiarami sfery przyciągania - obszaru w którym siła grawitacyjnego przyciągania planety będzie większa niż siła przyciągania grawitacyjnego Słońca ($\Delta_2 = r_1 m^{1/2}$). Dla Ziemi rozmiary sfery działania wynoszą:

$\Delta_{1,min} = 805$ tys km, $\Delta_{1,max} = 925$ tys km.

Natomiast rozmiary sfery przyciągania:

$\Delta_{2,min} = 256$ tys km, $\Delta_{2,max} = 265$ tys km.

Widzimy, że Księżyc znajduje się poza sferą przyciągania Ziemi, natomiast orbita Księżyca znajduje z bardzo dużym marginesem wewnątrz sfery działania Ziemi.

Grawitacyjne “sfery” planet

Rozmiary “sfer” działania planet: a - wielka półoś orbity w jednostkach astronomicznych,

m - masa planety w masach Słońca

$\Delta_{1,min}$ - minimalny rozmiar “sfery” działania liczony dla odległości od Słońca = a

r_{sat} - rozmiar orbity najodleglejszego księżyca.

Planeta	a	m	$\Delta_{1,min}$	r_{sat}
Merkury	0.3871	$1.69 \cdot 10^{-7}$	$6.54 \cdot 10^{-4}$	-
Wenus	0.7233	$2.45 \cdot 10^{-6}$	0.00358	-
Ziemia	1.0000	$3.00 \cdot 10^{-6}$	0.00538	0.00256
Mars	1.5236	$3.23 \cdot 10^{-7}$	0.00336	$1.57 \cdot 10^{-4}$
Jowisz	5.2033	$9.55 \cdot 10^{-4}$	0.28055	0.16711
Saturn	9.537	$2.86 \cdot 10^{-4}$	0.31738	0.17847
Uran	19.19	$4.37 \cdot 10^{-5}$	0.30125	0.13970
Neptun	30.07	$5.15 \cdot 10^{-5}$	0.50429	0.32945

Widzimy, że księżyce planet znajdują się wewnątrz sfery ich działania.

Prędkości kosmiczne

- ▶ Misje orbitalne - konieczność osiągnięcia I prędkości kosmicznej

$$V_I = \sqrt{\frac{GM_z}{R_z}} = 7.81 km/s$$

- ▶ Podróż do innych planet Układu Słonecznego - konieczność przekroczenia II prędkości kosmicznej

$$V_{II} = \sqrt{\frac{2GM_z}{R_z}} = 11.19 km/s$$

- ▶ Minimalna prędkość nadana ciału na Ziemi, aby mógł wylecieć z Układu Słonecznego - III prędkość kosmiczna.

$$V_{III} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 \frac{GM_{\odot}}{r_0} + V_{IIz}^2} = 16.65 km/s$$

Jak obliczamy wartość III prędkości kosmicznej?

Aby prędkość opuszczenia układu Słonecznego była najmniejsza musi być ono wystrzelone zgodnie z ruchem orbitalnym Ziemi, aby wektory prędkości ciała względem Ziemi i prędkości Ziemi względem Słońca były równoległe.

Ciało musi opuścić sferę działania Ziemi i na orbicie wokółsłonecznej mieć wystarczającą prędkość aby opuścić układ Słoneczny.

Ta prędkość dla orbity Ziemi to

$$V_{esc} = \sqrt{2} \cdot GM_{\odot}AU = \sqrt{2} \cdot V_0 = 42.122 \text{ km/s}$$

Różnica prędkości pomiędzy tą prędkością, a prędkością orbitalną Ziemi wynosi $\sqrt{2} - 1 V_0 = 12.337 \text{ km/s}$.

Jak obliczamy wartość III prędkości kosmicznej? c.d.

Obiekt wystrzelony w kosmos musi po wyjściu ze sfery działania Ziemi mieć względem niej prędkość 12.337 km/s.

Energia kinetyczna, którą nadajemy obiektowi musi być równa sumie energii potrzebnej do opuszczenia sfery działania Ziemi (w przybliżeniu II prędkość kosmiczna) i energii kinetycznej ciała względem Ziemi potrzebnej do opuszczenia układu Słonecznego

$$E_K(III) = \frac{1}{2}mv_{III}^2 = \frac{1}{2}m(\sqrt{2} - 1)^2 V_0^2 + \frac{1}{2}mV_{IIz}^2$$

Czyli

$$V_{III} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 V_0^2 + V_{IIz}^2} = 16.65 \text{ km/s}$$

Równanie rakietowe

W układzie związanym z rakieta o masie m

Δm - masa materii wyrzuconej z rakiety

$I_e = V_e$ - impuls właściwy, prędkość materii wyrzuconej z rakiety w układzie rakiety

ΔV - zmiana prędkości rakiety

$$\Delta m \cdot V_e = (m - \Delta m) \cdot \Delta V$$

Z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu w Δ i uwzględniając że masa materii wyrzuconej jest to masa tracona przez raketę możemy zapisać równanie w którym wystąpią pochodne d zamiast zmian Δ i zmiennymi będzie

$$m \frac{dV}{dt} = - \frac{dm}{dt} V_e$$

Równanie można rozwiązywać ze względu na masę lub na zmianę prędkości tu np. przy stałym przyspieszeniu a

$$m(t) = m_0 \exp - \frac{at}{V_e} = m_0 \exp - \Delta V / V_e$$