

Wykład 7 - Perturbacje ruchu keplerowskiego

6 i 20 kwietnia 2020

Funkcja Lagrange'a i funkcja Hamiltona

- ▶ Funkcja Lagrange'a jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej punktów materialnych układu.

$$L = E_K + U(q_i, t)$$

- ▶ Równania Lagrange'a drugiego rodzaju

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0$$

- ▶ Funkcja Hamiltona (q_r - uogólnione położenia, p_r - uogólnione pędy

$$H = \sum_{r=1}^n p_r \dot{q}_r - L$$

- ▶ Równania Hamiltona

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r} \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r}$$

Przekształcenia kanoniczne

Mamy $2n$ zmiennych kanonicznych: q_r i p_r ($r = 1, 2, \dots, n$). i $2n$ zmiennych Q_r i P_r . Przejście od układu zmiennych q_r, p_r do układu zmiennych Q_r, P_r wyrażone jest przez $2n$ równań

$$\begin{aligned}q_r &= q_r(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_1, P_2, \dots, P_n, t) \\p_r &= p_r(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_1, P_2, \dots, P_n, t)\end{aligned}$$

Jeżeli w rozpatrywanym zakresie zmiennych Q, P, t jacobian powyższego przekształcenia nie jest równy 0

$$\frac{D(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)}{D(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_1, P_2, \dots, P_n)} \neq 0$$

to w tym zakresie istnieje przekształcenie odwrotne

$$\begin{aligned}Q_r &= Q_r(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t) \\P_r &= P_r(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t)\end{aligned}$$

Przekształcenia kanoniczne c.d.

Dla zmiennych q_r i p_r mamy spełnione równania Hamiltona

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r} \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r},$$

a ze zmiennymi Q_r i P_r związana jest nowa funkcja Hamiltona $K(Q,P,t)$, taka że

$$\dot{Q}_r = \frac{\partial K(Q,P,t)}{\partial P_r} \quad \dot{P}_r = -\frac{\partial K(Q,P,t)}{\partial Q_r}$$

Przekształcenia spełniające te warunki nazywamy przekształceniami kanonicznymi.

Funkcja tworząca

Z zasady najmniejszego działania przy warunkach brzegowych $\delta q_r(t_1) = 0$ i $\delta q_r(t_2) = 0$ i przyjmując, że S jest funkcją czasu i położenia otrzymujemy:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dS = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{r=1}^n p_r dq_r - H(q, p, t) dt = 0$$

a przy warunkach brzegowych $\delta Q_r(t_1) = 0$ i $\delta Q_r(t_2) = 0$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dS = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{r=1}^n P_r dQ_r - K(Q, P, t) \right) dt = 0$$

Odejmujemy równania i otrzymujemy

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{r=1}^n (p_r dq_r - P_r dQ_r) - (H - K) dt = 0$$

Równanie jest spełnione jeżeli

$$\sum_{r=1}^n (p_r dq_r - P_r dQ_r) - [H(q, p, t) - K(Q, P, t)] dt = d\Phi(q, Q, t)$$

Wtedy z warunków brzegowych $\delta q_r(t_1) = 0$ i $\delta q_r(t_2) = 0$ i $\delta Q_r(t_1) = 0$ i $\delta Q_r(t_2) = 0$, wynika, że

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Phi}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\delta\Phi}{dt} dt = \delta\Phi|_{t_1}^{t_2} = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_r} \delta q_r + \frac{\partial\Phi}{\partial Q_r} \delta Q_r \right) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

Jeżeli pochodną funkcji

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial\Phi}{\partial Q_r} \dot{Q}_r \right)$$

podstawimy do równania to otrzymamy warunki:

$$p_r = \frac{\partial\Phi(q, Q, t)}{\partial q_r} \quad P_r = -\frac{\partial\Phi(q, Q, t)}{\partial Q_r}$$

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial\Phi(q, Q, t)}{\partial t}$$

Równanie Hamiltona-Jacobiego

Jeżeli funkcja $K(Q, P, t) = 0$, to

$$\dot{Q}_r = \frac{\partial K(Q, P, t)}{\partial P_r} = 0, \quad \dot{P}_r = -\frac{\partial K(Q, P, t)}{\partial Q_r} = 0$$

i w związku z tym

$$Q_r = \text{const} = \beta_r, \quad \dot{P}_r = \text{const} = \alpha_r$$

Funkcję tworzącą będziemy wtedy oznaczać $W(q, Q, t)$ i będzie spełniać równanie

$$H(q, p, t) + \frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial t} = 0$$

ponieważ

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$$

otrzymamy równanie nazywane równaniem Hamiltona - Jacobiego

$$\frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial t} + H(q_1, q_2, \dots, q_r, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_r}, t) = 0$$

Metoda wariacji stałych

Rozważmy układ punktów materialnych o funkcji Hamiltona (H_1 - hamiltonian zakłócający).

$$H = H_0(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t) + H_1(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t)$$

Ruch zakłócony układu opisany jest przez $2n$ równań

kanonicznych ($i=1, \dots, n$)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Założmy, że znamy ogólne rozwiązanie układu $2n$ równań kanonicznych ($i=1, \dots, n$)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} \quad \text{i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}$$

Metoda wariacji stałych c.d.

$$q_i = q_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, t)$$

$$p_i = p_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, t)$$

gdzie α_i, β_i są dowolnymi, niezależnymi stałymi całkowania.

Rozwiązania na q_i i p_i są dane przez związki:

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$$

w których funkcja $W = W(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t)$ jest całką zupełną równania Hamiltona - Jacobiego

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H_0(q_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, t) = 0$$

Metoda wariacji stałych c.d.

Rozwiązanie układu równań kanonicznych o funkcji Hamiltona $H = H_0 + H_1$ możemy otrzymać w podobnej postaci, ale α_i, β_i będą nowymi zmiennymi zależnymi od czasu. Chcemy znaleźć warunki jakie mają spełniać $\alpha_i(t), \beta_i(t)$, aby funkcje $q(\alpha_i, \beta_i, t), p(\alpha_i, \beta_i, t)$ spełniały równania kanoniczne dla ruchu zakłóconego.

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} \dot{\alpha}_r + \frac{\partial q_i}{\partial \beta_r} \dot{\beta}_r \right) = \frac{\partial (H_0 + H_1)}{\partial p_i}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r} \dot{\alpha}_r + \frac{\partial p_i}{\partial \beta_r} \dot{\beta}_r \right) = - \frac{\partial (H_0 + H_1)}{\partial q_i}$$

Metoda wariacji stałych c.d.

Ponieważ $\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}$ oraz $\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}$

$$\sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} \dot{\alpha}_r + \frac{\partial q_i}{\partial \beta_r} \dot{\beta}_r \right) = \frac{\partial H_1}{\partial p_i}$$

$$\sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r} \dot{\alpha}_r + \frac{\partial p_i}{\partial \beta_r} \dot{\beta}_r \right) = -\frac{\partial H_1}{\partial q_i}$$

Mnożąc pierwsze równania przez $\partial p_i / \partial \alpha_j$, a drugie przez $-\partial q_i / \partial \alpha_j$, a następnie sumując po i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right) \dot{\alpha}_r + \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial \beta_r} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial p_i}{\partial \beta_r} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right) \dot{\beta}_r \\ = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H_1}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial H_1}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right) \end{aligned}$$

Metoda wariacji stałych c.d.

Mnożąc pierwsze równania przez $\partial p_i / \partial \beta_j$, a drugie przez $-\partial q_i / \partial \beta_j$, a następnie sumując po i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} \frac{\partial p_i}{\partial \beta_j} - \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r} \frac{\partial q_i}{\partial \beta_j} \right) \dot{\alpha}_r + \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial \beta_r} \frac{\partial p_i}{\partial \beta_j} - \frac{\partial p_i}{\partial \beta_r} \frac{\partial q_i}{\partial \beta_j} \right) \dot{\beta}_r \\ = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H_1}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \beta_j} + \frac{\partial H_1}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \beta_j} \right) \end{aligned}$$

Hamiltonian H_1 , będący funkcją zmiennych q i p możemy przy pomocy zależności $q_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, t)$ i $p_i = p_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, t)$ wyrazić jako funkcję α β , przez co prawe strony równań możemy wyrazić jako:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H_1}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial H_1}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right) = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_j}$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H_1}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \beta_j} + \frac{\partial H_1}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \beta_j} \right) = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_j}$$

Metoda wariacji stałych c.d.

Równania możemy zapisać za pomocą nawiasów Lagrange'a

$$\sum_{i=1}^n [\alpha_r, \alpha_j] \dot{\alpha}_r + \sum_{i=1}^n [\beta_r, \alpha_j] \dot{\beta}_r = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_j}$$

$$\sum_{i=1}^n [\alpha_r, \beta_j] \dot{\alpha}_r + \sum_{i=1}^n [\beta_r, \beta_j] \dot{\beta}_r = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_j}$$

Równania te są słuszne dla każdego układu stałych α_i , β_i , ale przyjmują szczególnie prostą postać jeżeli α_i , β_i są zmiennymi kanonicznymi. Możemy to pokazać przekształcając funkcję $W(q, \alpha, t)$ w funkcję $W'(\alpha, \beta, t)$

$$\frac{\partial W'}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial W(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_j} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} = \beta_j + \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}$$

Metoda wariacji stałych c.d.

W podobny sposób można otrzymać

$$\frac{\partial W'}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial q_i}{\partial \beta_j}$$

Zatem

$$[\alpha_r, \beta_j] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} \frac{\partial p_i}{\partial \beta_j} - \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r} \frac{\partial q_i}{\partial \beta_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta_j} \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} - \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial q_i}{\partial \beta_j}$$

i następnie

$$[\alpha_r, \beta_j] = \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left(\frac{\partial W'}{\partial \alpha_r} - \beta_r \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left(\frac{\partial W'}{\partial \beta_j} \right)$$

$[\alpha_r, \beta_j] = 0$ dla $r \neq j$ oraz $[\alpha_i, \beta_i] = -1$ lub $[\beta_i, \alpha_i] = 1$ dla $r = j = i$. Z własności nawiasów Lagrange'a $[\alpha_r, \alpha_j] = 0$ i $[\beta_r, \beta_j] = 0$ dla wszystkich $j, r = 1, 2, \dots, n$

Równania w postaci kanonicznej

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial(H - H_0)}{\partial \alpha_i}$$

$$\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_i} = -\frac{\partial(H - H_0)}{\partial \beta_i}$$

Równania ruchu perturbowanego

Równania ruchu perturbowanego możemy zapisać w postaci:

$$\ddot{x}_i + K^2 \frac{x_i}{r_{in}^3} = \frac{\partial R}{\partial x_i}$$

$$\ddot{y}_i + K^2 \frac{y_i}{r_{in}^3} = \frac{\partial R}{\partial y_i}$$

$$\ddot{z}_i + K^2 \frac{z_i}{r_{in}^3} = \frac{\partial R}{\partial z_i}$$

($i=1,2, \dots, n-1, i \neq j$), gdzie $K^2 = k^2(1 + m_i)$ i

$$R = k^2 \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_{jn}^3} \right)$$

Równania ruchu w zmiennych kanonicznych

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}, \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}$$

$$\ddot{x} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \ddot{z} = -\frac{\partial H}{\partial z}$$

Dla ruchu niezaburzonego:

$$\dot{x} = \frac{\partial H_0}{\partial \dot{x}}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H_0}{\partial \dot{y}}, \quad \dot{z} = \frac{\partial H_0}{\partial \dot{z}}$$

$$\ddot{x} = -\frac{\partial H_0}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial H_0}{\partial y}, \quad \ddot{z} = -\frac{\partial H_0}{\partial z}$$

gdzie $H = H_0 + H_1 = H_0 - R$

Stałe kanoniczne rozwiązania keplerowskiego

Rozwiązanie równania ruchu niezaburzonego metodą Hamiltona - Jacobiego daje nam 6 stałych kanonicznych $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$. Rozwiązania mają formalną postać:

$$x = f_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t) \quad \dot{x} = g_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t)$$

$$y = f_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t) \quad \dot{y} = g_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t)$$

$$z = f_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t) \quad \dot{z} = g_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t)$$

Zmienne kanoniczne są następujące:

$$\alpha_1 = -\frac{K^2}{2a} \quad \alpha_2 = K\sqrt{a(1-e^2)} \quad \alpha_3 = K\sqrt{a(1-e^2)}\cos i$$

$$\beta_1 = -t_0 = \left(\frac{\epsilon - \pi}{K}\right)a^{3/2} \quad \beta_2 = \pi - \Omega = \omega \quad \beta_3 = \Omega$$

Równania na pochodne czasowe stałych kanonicznych całkowania równania zaburzonego mają postać:

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}$$

Aby je otrzymać przypominamy związki między współrzędnymi planety, a jej elementami orbitalnymi:

$$\begin{aligned}x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) \\y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) \\z &= r \sin u \sin i\end{aligned}$$

$$E - e \sin E = nt + \epsilon - \pi$$

$$u = \vartheta + \omega, \quad r = a(1 - e \cos E), \quad \operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$$

Podane zależności pomiędzy elementami kanonicznymi a elementami orbitalnymi i elementami orbitalnymi a współrzędnymi kartezjańskimi umożliwiają za pomocą równań opisujących zmiany elementów kanonicznych zapisać równania na zmiany elementów orbitalnych przez co możemy otrzymać:

$$x = \phi_1(a, e, i, \Omega, \pi, \epsilon, t),$$

$$y = \phi_2(a, e, i, \Omega, \pi, \epsilon, t),$$

$$z = \phi_3(a, e, i, \Omega, \pi, \epsilon, t),$$

$$\dot{x} = \psi_1(a, e, i, \Omega, \pi, \epsilon, t),$$

$$\dot{y} = \psi_2(a, e, i, \Omega, \pi, \epsilon, t),$$

$$\dot{z} = \psi_3(a, e, i, \Omega, \pi, \epsilon, t),$$

Orbita oskulacyjna

Niech w chwili t_0 elementy orbitalne przyjmą wartości $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \pi_0, \epsilon_0$ wtedy współrzędne prostokątne i ich pochodne wyrażamy w zależności od zmiennej t przez:

$$\begin{aligned}x_0 &= \phi_1(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \pi_0, \epsilon_0, t), \\y_0 &= \phi_2(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \pi_0, \epsilon_0, t), \\z_0 &= \phi_3(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \pi_0, \epsilon_0, t), \\\dot{x}_0 &= \psi_1(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \pi_0, \epsilon_0, t), \\\dot{y}_0 &= \psi_2(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \pi_0, \epsilon_0, t), \\\dot{z}_0 &= \psi_3(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \pi_0, \epsilon_0, t)\end{aligned}$$

Jeżeli począwszy od chwili t_0 $R = 0$, to elementy $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \pi_0, \epsilon_0$ mają stałe wartości i równania te przedstawiają ruch keplerowski fikcyjnej planety o masie m . Ponieważ w chwili t_0 elementy $a, e, i, \Omega, \pi, \epsilon$ przyjmują wartości $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \pi_0, \epsilon_0$ to $x = x_0, y = y_0, z = z_0, \dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \dot{z} = \dot{z}_0$

Orbita oskulacyjna c.d.

- ▶ W nieskończenie małym interwale czasu orbita rzeczywista planety P będzie styczna do keplerowskiej orbity planety fikcyjnej i w przedziale czasu dt oba ciała przebiegną jednakowy łuk.
- ▶ W różnych chwilach czasu dla orbity ciała P otrzymamy dwie różne orbity keplerowskie.
- ▶ Sześć stałych $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \pi_0, \epsilon_0$ wyrażają w chwili t_0 (nazywanej epoką oskulacji) odpowiednią orbitę oskulacyjną
- ▶ Orbita ciała P jest obwiednią nieskończenie wielu orbit oskulacyjnych. Za pomocą wariacji elementów możemy porównywać elementy oskulacyjne w epoce t z elementami oskulacyjnymi w epoce t_0 .
- ▶ Różnice $\delta a = a - a_0, \delta e = e - e_0, \delta i = i - i_0, \delta \Omega = \Omega - \Omega_0, \delta \pi = \pi - \pi_0, \delta \epsilon = \epsilon - \epsilon_0$ nazywamy perturbacjami elementów.
- ▶ Ruch po orbicie rzeczywistej jest ruchem perturbowanym na skutek działania siły perturbacyjnej o składowych $\partial R / \partial x, \partial R / \partial y, \partial R / \partial z$

Równania wariacyjne dla elementów orbitalnych

Równania na zmianę elementów kanonicznych chcemy zamienić na równania na zmianę elementów orbitalnych. Elementy a , e , i , ϵ , π , Ω oznaczmy przez c_1 , c_2 , ..., c_6 . Ponieważ są funkcją elementów kanonicznych, to otrzymamy zależność ($j = 1, 2, \dots, 6$):

$$\dot{c}_j = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial c_j}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \frac{\partial c_j}{\partial \beta_i} \dot{\beta}_i \right)$$

$$\dot{c}_j = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial c_j}{\partial \alpha_i} \frac{\partial R}{\partial \beta_i} - \frac{\partial c_j}{\partial \beta_i} \frac{\partial R}{\partial \alpha_i} \right)$$

$$\dot{c}_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial c_j}{\partial \alpha_i} \sum_{k=1}^6 \frac{\partial R}{\partial c_k} \frac{\partial c_k}{\partial \beta_i} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial c_j}{\partial \beta_i} \sum_{k=1}^6 \frac{\partial R}{\partial c_k} \frac{\partial c_k}{\partial \alpha_i}$$

$$\dot{c}_j = \sum_{k=1}^6 \frac{\partial R}{\partial c_k} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial c_j}{\partial \alpha_i} \frac{\partial c_k}{\partial \beta_i} - \frac{\partial c_j}{\partial \beta_i} \frac{\partial c_k}{\partial \alpha_i} \right)$$

Równania wariacyjne dla elementów orbitalnych c. d.

Otrzymujemy sześć ($j = 1, 2, \dots, 6$) równań zawierających nawiasy Poissona:

$$\dot{c}_j = \sum_{k=1}^6 (c_j, c_k) \frac{\partial R}{\partial c_k}$$

Zależność elementów orbity od elementów kanonicznych jest następująca:

$$\begin{aligned} c_1 = a &= -\frac{K^2}{2\alpha_1} & c_4 = \epsilon &= \beta_2 + \beta_3 + \frac{\beta_1}{K^2}(-2\alpha_1)^{3/2} \\ c_2 = e &= \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{K^4}} & c_5 = \pi &= \beta_2 + \beta_3 \\ c_3 = i &= \arccos \frac{\alpha_3}{\alpha_2} & c_6 = \Omega &= \beta_3 \end{aligned}$$

Wartości nawiasów Poissona dla elementów orbitalnych

Otrzymujemy tylko 6 różnych od zera nawiasów Poissona ($e = \sin \phi$):

$$(a, \epsilon) = \frac{2}{na}$$

$$(e, \epsilon) = -\frac{\cos \phi}{na^2} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}$$

$$(e, \pi) = -\frac{\operatorname{ctg} \phi}{na^2}$$

$$(i, \epsilon) = -\frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{\cos \phi na^2}$$

$$(i, \pi) = -\frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{\cos \phi na^2}$$

$$(i, \Omega) = -\frac{1}{\cos \phi na^2 \sin i}$$

Równania wariacyjne dla elementów orbitalnych c. d.

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial e}$$

$$\dot{e} = -\frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e} [1 - (1-e^2)^{1/2}] \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \pi}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \left(\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\partial R}{\partial \pi} \right) - \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}$$

$$\dot{e} = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e} [1 - (1-e^2)^{1/2}] \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\dot{\pi} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}$$

W przypadku, gdy wybierzemy inne zmienne, np: zamiast π i ϵ wybieramy σ i ω ($M = nt + \sigma$), nieznikające nawiasy Poissona będą miały postać:

$$(a, \sigma) = \frac{2}{na}$$

$$(e, \sigma) = \frac{1 - e^2}{na^2 e}$$

$$(e, \omega) = -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e}$$

$$(i, \omega) = \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2(1 - e^2)^{1/2}}$$

$$(i, \Omega) = -\frac{1}{na^2(1 - e^2)^{1/2} \sin i}$$

Przypadek małego mimośrod*u* *e* i małego nachylenia *i*

- ▶ W niektórych równaniach *e* występuje w mianowniku. W przypadku wyrażenia przy $\partial R / \partial \epsilon$ w równaniu na $\dot{\epsilon}$ nie stanowi to problemu bo

$$\frac{(1 - e^2)^{1/2}}{na^2 e} [1 - (1 - e^2)^{1/2}] = \frac{(1 - e^2)^{1/2} e}{na^2 [1 + (1 - e^2)^{1/2}]}$$

- ▶ Natomiast w przypadku (π, e) potrzebne jest podstawienie $h = e \sin \pi$ i $k = e \cos \pi$ (zmienią się tylko równania na $\dot{\epsilon}$ i $\dot{\pi}$)
- ▶ W przypadku małego nachylenia, w podanych równaniach (na di/dt i $d\Omega/dt$) problem może powodować obecność w mianowniku $\sin i$. Można wtedy skorzystać z podstawienia $p = \operatorname{tg}(i) \sin(\Omega)$ i $q = \operatorname{tg}(i) \cos(\Omega)$

Równania Gaussa

- ▶ W równaniach wariacyjnych Lagrange'a występują pochodne cząstkowe funkcji perturbacyjnej względem elementów orbitalnych (użyteczne przy rozwijaniu na szeregi, o tym jeszcze dalej)
- ▶ W wielu zagadnieniach wygodne jest rozłożenie siły perturbującej na składowe prostokątne.
- ▶ Równania Gaussa: siła perturbująca ma składowe
 S - wzdłuż promienia wodzącego
 T - w płaszczyźnie orbity, prostopadła do promienia wodzącego i zgodna z ruchem orbitalnym ciała
 W - prostopadła do płaszczyzny orbity skierowana zgodnie z momentem pędu

Cosinusy kierunkowe

Z równań

$$x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i)$$

$$y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i)$$

$$z = r \sin u \sin i$$

$u = \vartheta + \omega = \pi - \Omega + \vartheta$ można policzyć $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - cosinusy kierunkowe promienia wodzącego z osiami x, y, z (a więc rzuty składowej S na osie x, y, z)

$$\lambda_1 = \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i$$

$$\lambda_2 = \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i$$

$$\lambda_3 = \sin u \sin i$$

Cosinusy kierunkowe c.d.

Cosinusy kierunkowe składowej T

$$\mu_1 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial u} = -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i$$

$$\mu_2 = \frac{\partial \lambda_2}{\partial u} = -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i$$

$$\mu_3 = \frac{\partial \lambda_3}{\partial u} = \cos u \sin i$$

Cosinusy kierunkowe składowej W

$$\nu_1 = \frac{1}{\sin u} \frac{\partial \lambda_1}{\partial i} = \sin \Omega \sin i$$

$$\nu_2 = \frac{1}{\sin u} \frac{\partial \lambda_2}{\partial i} = -\cos \Omega \sin i$$

$$\nu_3 = \frac{1}{\sin u} \frac{\partial \lambda_3}{\partial i} = \cos i$$

Składowe siły perturbacyjnej

Składowe siły perturbacyjnej wzdłuż osi x , y , z są odpowiednio równe:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \lambda_1 S + \mu_1 T + \nu_1 W$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \lambda_2 S + \mu_2 T + \nu_2 W$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \lambda_3 S + \mu_3 T + \nu_3 W$$

zaś składowe S , T , W są dane wzorami:

$$S = \lambda_1 \frac{\partial R}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial R}{\partial y} + \lambda_3 \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$T = \mu_1 \frac{\partial R}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial R}{\partial y} + \mu_3 \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$W = \nu_1 \frac{\partial R}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial R}{\partial y} + \nu_3 \frac{\partial R}{\partial z}$$

Obliczanie składowych siły perturbacyjnej

Jeżeli oznaczymy przez c jeden z sześciu elementów orbitalnych (a , e , i , Ω , π , ϵ) to można otrzymać:

$$\frac{\partial R}{\partial c} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial c}$$

a następnie:

$$\frac{\partial R}{\partial c} = \sum_{j=1}^3 \left(\lambda_j S + \frac{\partial \lambda_j}{\partial u} T + \frac{1}{\sin u} \frac{\partial \lambda_j}{\partial i} W \right) \frac{\partial(r\lambda_j)}{\partial c}$$

Korzystając z własności sum iloczynów cosinusów kierunkowych otrzymamy:

$$\frac{\partial R}{\partial c} = S \frac{\partial r}{\partial c} + rT \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial u} \frac{\partial \lambda_j}{\partial c} \right) + \frac{rW}{\sin u} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial i} \frac{\partial \lambda_j}{\partial c} \right)$$

Obliczanie składowych siły perturbacyjnej

Pamiętamy, że dla niezaburzonego ruchu keplerowskiego mamy następujące zależności:

$$r = a(1 - e \cos E)$$

$$E - e \sin E = M = nt + \epsilon - \pi$$

$$r \sin \vartheta = a \sqrt{1 - e^2} \sin E$$

$$r \cos \vartheta = a(\cos E - e)$$

$$r(1 + e \cos \vartheta) = a(1 - e^2)$$

Obliczanie składowych siły perturbacyjnej c.d.

Pozwala to na obliczenie składowych siły perturbacyjnej:

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{r}{a} S$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = -aS \cos \vartheta + a \left(\frac{r}{p} + 1 \right) T \sin \vartheta$$

$$\frac{\partial R}{\partial i} = rW \sin (\omega + \vartheta)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = 2rT \sin^2 \frac{i}{2} - rW \sin i \cos (\omega + \vartheta)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \pi} = -\frac{ae \sin \vartheta}{\sqrt{1-e^2}} S + \left(r - \frac{a^2}{r} \sqrt{1-e^2} \right) T$$

$$\frac{\partial R}{\partial \epsilon} = \frac{ae \sin \vartheta}{\sqrt{1-e^2}} S + \frac{a^2}{r} \sqrt{1-e^2} T$$

Równania Gaussa

Co pozwala na otrzymanie równań Gaussa

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left(Se \sin \vartheta + T \frac{p}{r} \right)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na} [S \sin \vartheta + T(\cos \vartheta + \cos E)]$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} W \frac{r}{a} \cos(\omega + \vartheta)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{Wr \sin(\omega + \vartheta)}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i}$$

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{nae} \left[-S \cos \vartheta + T \left(\frac{r}{p} + 1 \right) \sin \vartheta \right] + 2 \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt}$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2r}{na^a} S + \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{e^2}{[1 + (1-e^2)^{1/2}]} \frac{d\pi}{dt} + 2(1-e^2)^{1/2} \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt}$$

Równanie wariacyjne dla ruchu średniego

Różniczkujemy względem czasu zależność $n^2 a^3 = \text{const}$ i otrzymujemy:

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{n}{a} \frac{da}{dt}$$

co daje:

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{a\sqrt{1-e^2}} [Se \sin \vartheta + T(1 + e \cos \vartheta)]$$

Równanie dla anomalii średniej:

$$M = \epsilon - \pi + \int n dt$$

można zróżniczkować po czasie i otrzymać:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} - \frac{d\pi}{dt} + \int \frac{dn}{dt} dt$$

Równania wariacyjne Eulera

Dokonamy teraz rozłożenia siły perturbującej na składowe:

$\tilde{T}$ - wzdłuż toru ciała

$\tilde{N}$ - prostopadła do toru w płaszczyźnie orbity skierowana do wewnątrz elipsy

$\tilde{W} = W$ - prostopadła do płaszczyzny orbity skierowana zgodnie z momentem pędu

Jeżeli przez δ oznaczymy kąt pomiędzy wektorem prędkości orbitalnej a wektorem promienia wodzącego to będzie to kąt pomiędzy $\tilde{T}$ i S

$$\cos \delta = \frac{e \sin \vartheta}{\sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}$$

Równania wariacyjne Eulera

Pomiędzy składowymi S , T , W i $\tilde{T}$, $\tilde{N}$, $\tilde{W}$ mamy następujące zależności: $\tilde{W} = W$ i

$$\tilde{T} = S \cos \delta + T \sin \delta$$

$$\tilde{N} = -S \sin \delta + T \cos \delta$$

oraz

$$S = \tilde{T} \cos \delta - \tilde{N} \sin \delta$$

$$T = \tilde{T} \sin \delta + \tilde{N} \cos \delta$$

Równania na $\frac{di}{dt}$ i $\frac{d\Omega}{dt}$ będą miały taką samą postać jak w równaniach Gaussa.

$$\frac{da}{dt} = \frac{2\tilde{T}}{n\sqrt{1-e^2}} \sqrt{1+2e\cos\vartheta+e^2}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na\sqrt{1+2e\cos\vartheta+e^2}} [2\tilde{T}(\cos\vartheta+e) - \tilde{N}\frac{r}{a}\sin\vartheta]$$

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{nae\sqrt{1+2e\cos\vartheta+e^2}} \left[2\tilde{T}\sin\vartheta + \tilde{N}(\cos E+e) \right] + 2\sin^2\frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{dt} = & -\frac{2r}{na^2\sqrt{1+2e\cos\vartheta+e^2}} \left[\tilde{T}\sin\vartheta - \tilde{N}(1+e\cos\vartheta) \right] + \\ & + \frac{e^2}{[1+(1-e^2)^{1/2}]} \frac{d\pi}{dt} + 2(1-e^2)^{1/2}\sin^2\frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt} \end{aligned}$$