

Wykład 8 - Formalne rozwiązanie równań wariacyjnych Lagrange'a

27.04.2020

Funkcja perturbacyjna w układzie n-punktów materialnych

Rozpatrujemy ruch względem punktu n , o największej masie.

Funkcja perturbacyjna dla punktu i będzie miała postać:

$$R_i = k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} m_j \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \right)$$

Jeżeli przyjmiemy, że

H_{ij} - kąt pomiędzy promieniami wodzącymi r_i i r_j

► Wyraz główny $\frac{1}{r_{ij}}$,

$$\frac{1}{r_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos H_{ij}}}$$

,

► wyraz dodatkowy $-\frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3}$ zapisać również jako

$$-\frac{r_i \cos(H_{ij})}{r_j^2}$$

Formalne rozwiązanie równań wariacyjnych Lagrange'a

Rozwiązania równań wariacyjnych Lagrange'a dokonuje się metodą rozwinięcia funkcji perturbacyjnej na szereg w postaci

$$R = \sum C \cos D$$

gdzie, w przypadku dwóch planet o masach m i m'

$C = C(a, a', e, e', i, i')$, a czynniki D mają postać

$D = j_0(nt + \epsilon) + j_1(n't + \epsilon') + j_2\pi + j_3\pi' + j_4\Omega + j_5\Omega'$, gdzie $j_0, j_1, \dots, j_5$ są dowolnymi, całkowitymi liczbami dodatnimi, ujemnymi, lub równymi zero, które spełniają warunek $\sum_{i=0}^5 j_i = 0$.

Po prawej stronie równań wariacyjnych Lagrange'a znajduje się n -średni ruch własny zależny od a , przez co różniczkowanie

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \sum \frac{\partial C}{\partial a} \cos D - t \frac{dn}{da} \sum C \sin D$$

Obecność czasu w drugim członie powoduje trudność w całkowaniu równania $d\epsilon/dt$ ($\epsilon = -nT + \pi$).

Modyfikacja równań wariacyjnych Lagrange'a.

Pochodną $\partial R/\partial a$ możemy zapisać jako

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)_n + \frac{\partial R}{\partial n} \frac{dn}{da} = \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)_n + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} t \frac{dn}{da}$$

ponieważ

$$\frac{\partial R}{\partial \epsilon} = \frac{1}{2} n a \frac{da}{dt}$$

to równanie możemy zapisać jako

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)_n + \frac{1}{2} n a t \frac{da}{dt} \frac{dn}{da} = \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)_n + \frac{1}{2} n a t \frac{dn}{dt}$$

Modyfikacja równań wariacyjnych Lagrange'a c.d

Równanie na $d\epsilon/dt$ będzie miało postać

$$\frac{d\epsilon}{dt} + t \frac{dn}{dt} = -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)_n + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e} [1 - (1-e^2)^{1/2}] \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 (1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial i}$$

W celu wyeliminowania t występującego poza argumentami D wprowadzamy zmienną ϵ' określoną równaniem

$$\frac{d\epsilon'}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} + t \frac{dn}{dt}$$

i równanie różniczkowe na ϵ' będzie miało postać wyjściowego równania na ϵ

$$\frac{d\epsilon'}{dt} = -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)_n + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e} [1 - (1-e^2)^{1/2}] \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 (1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial i}$$

Interpretacja zmiennej ϵ'

Znaczenie zmiennej ϵ' wynika ze zróżniczkowania średniej długości

$$\lambda = nt + \epsilon$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + t \frac{dn}{dt} + \frac{d\epsilon}{dt}$$

stąd

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + \frac{d\epsilon'}{dt}$$

i całkując równanie otrzymamy, że

$$\lambda = nt + \epsilon = \int n dt + \epsilon'$$

przy założeniu, że stała całkowania zawarta jest w ϵ' jeżeli n jest znane.

Z tego równania wynika, że $\partial R / \partial \epsilon = \partial R / \partial \epsilon'$

Wielkość $\int n dt$ nazywamy średnim ruchem na orbicie perturbowanej.

Modyfikacja równań wariacyjnych Lagrange'a c.d

Zmodyfikowane równania wariacyjne Lagrange'a różnią się od pierwotnych tym, że ϵ i $\partial R/\partial a$ zastąpione są przez ϵ' i $(\partial R/\partial a)_n$ i w funkcji perturbacyjnej należy zastąpić $nt + \epsilon$ przez $\int n dt + \epsilon'$. Oznaczając $\int n dt = \rho$ otrzymamy $n = d\rho/dt$ oraz $d^2\rho/dt^2 = dn/dt$ i

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \epsilon} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \lambda}$$

skąd

$$\rho = -3 \int \int \frac{1}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \epsilon} dt dt$$

Przypadek dwóch planet

Funkcja perturbacyjna w przypadku zaburzenia ruchu ciała względem Słońca przez odległe punktowe masy ma postać

$$R_{ij} = k^2 \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_{jn}^3} \right)$$

W przypadku dwóch planet o masach m i m' i o współrzędnych względem Słońca (x, y, z) i (x', y', z') (badamy wpływ perturbacji jednej planety na drugą i odwrotnie)

$$R = k^2 m' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right)$$

$$R' = k^2 m \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \right)$$

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

Formalne rozwiązanie równań wariacyjnych Lagrange'a

Rozwiązania równań wariacyjnych Lagrange'a dokonuje się metodą rozwinięcia funkcji perturbacyjnej na szereg w postaci

$$R = \sum C \cos D$$

$$R' = \sum C' \cos D'$$

gdzie , w przypadku dwóch planet o masach m i m'

- ▶ $\rho = \int n dt$ i $\rho' = \int n' dt$
- ▶ $C = C(a, a', e, e', i, i')$,
- ▶ czynniki D mają postać
 $D = j_0(nt + \epsilon) + j_1(n't + \epsilon') + j_2\pi + j_3\pi' + j_4\Omega + j_5\Omega'$, gdzie $j_0, j_1, \dots, j_5$ są dowolnymi, całkowitymi liczbami dodatnimi, ujemnymi, lub równymi zero, które spełniają warunek
 $\sum_{i=0}^5 j_i = 0$
- ▶ Masy wchodzą do współczynników C i C' : $C = C(m')$ i $C' = C'(m)$

Formalne rozwiązanie równań wariacyjnych Lagrange'a

Metodą kolejnych przybliżeń można otrzymać rozwiązania na elementy orbitalne c i c' w postaci szeregów:

$$c = c_0 + \delta_1 c + \delta_2 c + \dots$$

$$c' = c'_0 + \delta_1 c' + \delta_2 c' + \dots,$$

gdzie δ_p zawiera równania rzędu p względem mas m i m' . Podobnie

$$n = n_0 + \delta_1 n + \delta_2 n + \dots,$$

gdzie $n_0 = k\sqrt{1+ma_o}^{-3/2}$

$$n = n_0 + \delta_1 n + \delta_2 n + \dots = n_0 \left(1 + \frac{\delta_1 a}{a_0} + \frac{\delta_2 a}{a_0} + \dots \right)^{-3/2} =$$

$$n_0 \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\delta_1 a}{a_0} - \frac{3}{2} \frac{\delta_2 a}{a_0} + \frac{15}{8} \left(\frac{\delta_1 a}{a_0} \right)^2 + \dots \right]$$

Ruch własny

$$\delta_1 n = -\frac{3}{2} \frac{\delta_1 a}{a_0} n_0$$

$$\delta_2 n = n_0 \left[-\frac{3}{2} \frac{\delta_2 a}{a_0} + \frac{15}{8} \left(\frac{\delta_1 a}{a_0} \right)^2 \right]$$

ze zmian ruchu własnego otrzymujemy kolejne poprawki uśrednionego ruchu własnego: $\rho_0 = n_0 t$, $\delta_1 \rho = \int \delta_1 n dt$, $\delta_2 \rho = \int \delta_2 n dt$ i $\rho = \rho_0 + \delta_1 \rho + \delta_2 \rho$

Perturbacje pierwszego rzędu

$$R_0 = \sum C_0 \cos D_0 \quad R'_0 = \sum C'_0 \cos D'_0$$

$$C = C(a_0, a'_0, e_0, e'_0, i_0, i'_0), \quad C' = C'(a_0, a'_0, e_0, e'_0, i_0, i'_0),$$

$$D = j_0(n_0 t + \epsilon_0) + j_1(n'_0 t + \epsilon'_0) + j_2 \pi_0 + j_3 \pi'_0 + j_4 \Omega_0 + j_5 \Omega'_0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\delta_1 a}{dt} = \frac{2}{n_0 a_0} \frac{\partial R_0}{\partial \epsilon_0} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d\delta_1 \Omega}{dt} = \frac{1}{n_0 a_0^2 (1-e_0^2)^{1/2} \sin i_0} \frac{\partial R_0}{\partial i_0} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\delta_1 a'}{dt} = \frac{2}{n'_0 a'_0} \frac{\partial R_0}{\partial \epsilon_0} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d\delta_1 \Omega'}{dt} = \frac{1}{n'_0 a'^2_0 (1-e'^2_0)^{1/2} \sin i'_0} \frac{\partial R'_0}{\partial i'_0} \end{array} \right.$$

Perturbacje pierwszego rzędu

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 a = \frac{2}{n_0 a_0} \int \frac{\partial R_0}{\partial \epsilon_0} dt = \frac{2}{n_0 a_0} \frac{\partial}{\partial \epsilon_0} \int R_0 dt \\ \dots\dots\dots \\ \delta_1 \Omega = \frac{1}{n_0 a_0^2 (1-e_0^2)^{1/2} \sin i_0} \int \frac{\partial R_0}{\partial i_0} = \frac{1}{n_0 a_0^2 (1-e_0^2)^{1/2} \sin i_0} \frac{\partial}{\partial i_0} \int R_0 dt \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial R_0}{\partial \epsilon_0} = - \sum j_0 C_0 \sin D_0 & \frac{\partial R_0}{\partial a_0} = \sum \frac{\partial C_0}{\partial a_0} \cos D_0 \\ \frac{\partial R_0}{\partial \pi_0} = - \sum j_2 C_0 \sin D_0 & \frac{\partial R_0}{\partial e_0} = \sum \frac{\partial C_0}{\partial e_0} \cos D_0 \\ \frac{\partial R_0}{\partial \Omega_0} = - \sum j_4 C_0 \sin D_0 & \frac{\partial R_0}{\partial i_0} = \sum \frac{\partial C_0}{\partial i_0} \cos D_0 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 a = \frac{2}{n_0 a_0} \sum j_0 C_0 \int \sin D_0 dt \\ \dots\dots\dots \\ \delta_1 \Omega = \frac{1}{n_0 a_0^2 (1-e_0^2)^{1/2} \sin i_0} \sum \frac{\partial C_0}{\partial i_0} \int \cos D_0 dt \end{array} \right.$$

Perturbacje pierwszego rzędu - perturbacje okresowe

Ponieważ prawe strony zawierają tylko całki $\int \cos D_0 dt = \frac{\sin D_0}{j_0 n_0 + j_1 n'_0}$
i $\int \sin D_0 dt = -\frac{\cos D_0}{j_0 n_0 + j_1 n'_0}$ to dla $c = a, e, i$

$$\delta_1 c = \sum \frac{J}{j_0 n_0 + j_1 n'_0} \cos D_0$$

a dla $c = \epsilon, \pi, \Omega$

$$\delta_1 c = \sum \frac{K}{j_0 n_0 + j_1 n'_0} \sin D_0$$

Analogiczne wzory otrzymujemy dla planety P'

Perturbacje pierwszego rzędu są perturbacjami okresowymi o okresie T równym okresowi argumentu D_0

$$T = \frac{2\pi}{j_0 n_0 + j_1 n'_0}$$

Perturbacje pierwszego rzędu - perturbacje wiekowe

W przypadku $j_0 = j_1 = 0$ mamy do czynienia z sytuacją że $j_0 n_0 + j_1 n'_0 = 0$, nawet jeżeli średnie ruchy n_0 i n'_0 są niewspółmierne. Jeżeli $j_0 = j_1 = 0$ to D_0 ma stałą wielkość

$$D_0 = D_0^* = j_2 \pi_0 + j_3 \pi'_0 + j_4 \Omega_0 + j_5 \Omega'_0$$

i $\int \cos D_0 dt = t \cos D_0^*$ i $\int \sin D_0 dt = t \sin D_0^*$. Perturbacje wiekowe pierwszego rzędu otrzymujemy dla wyrazów funkcji perturbacyjnej, w których argumenty D_0 nie zależą od czasu. $[R]$ - część wiekowa funkcji perturbacyjnej.

$$\frac{\partial[R]}{\partial \epsilon_0} = 0$$

$$\frac{\partial[R']}{\partial \epsilon'_0} = 0$$

Zatem uwzględniając perturbacje pierwszego rzędu możemy zapisać

$$a = a_0 + \sum \frac{J}{j_0 n_0 + j_1 n'_0} \cos D_0$$

dla $c = e, i$ oraz $j_0 \neq 0$ i $j_1 \neq 0$

$$c = c_0 + At + \sum \frac{J}{j_0 n_0 + j_1 n'_0} \cos D_0$$

a dla $c = \epsilon, \pi, \Omega$ oraz $j_0 \neq 0$ i $j_1 \neq 0$

$$c = c_0 + Bt + \sum \frac{K}{j_0 n_0 + j_1 n'_0} \sin D_0$$

W pierwszy rzędzie rachunku perturbacyjnego rozmiary wielkich półośi a i i średni ruch własny n nie zawierają wyrazów wiekowych.

Perturbacje długookresowe

W układzie planetarnym często możemy mieć sytuację, że

$$T = \frac{2\pi}{j_0 n_0 + j_1 n'_0}$$

jest znacznie większy od okresów planet $T_0 = \frac{2\pi}{n_0}$ i $T'_0 = \frac{2\pi}{n'_0}$.

Takie perturbacje nazywamy długookresowymi i mają one istotną rolę w układzie planetarnym. Są one bardzo znaczne w średniej długości ($\lambda = \rho + \epsilon$).

$$\lambda = \rho_0 + \epsilon_0 + \delta_1(\rho + \epsilon) + \dots$$

$$\delta_1 \lambda = \delta_1 \rho + \delta_1 \epsilon$$

$$\delta_1 \rho = -\frac{3}{2} \frac{n_0}{a_0} \int \delta_1 a dt = \frac{3}{a_0^2} \sum j_0 C_0 \int \int \sin D_0 dt dt$$

$$\delta_1 \rho = -\frac{3}{a_0^2} \sum \frac{j_0 C_0 \sin D_0}{(j_0 n_0 + j_1 n'_0)^2}$$

Przypadek Jowisza i Saturna

Średni ruch dzienny Jowisza (na epokę 1900) $n_0 = 299''.1283$

Średni ruch dzienny Saturna (na epokę 1900) $n'_0 = 120''.4547$

- ▶ $n_0 - 2n'_0 = 58''.2189$, co odpowiada $T = 61$ lat - okres dość krótki ale wyrazy zawierające w argumentach D_0 wielkość $(\lambda - 2\lambda')$ lub jej wielokrotność mogą występować w wyrazach pierwszego rzędu rozwinięcia względem mimośrodków i nachyleń.
- ▶ $2n_0 - 5n'_0 = -4''.0169$, co odpowiada $T = 880$ lat - wyrazy perturbacyjne o największym wpływie na długości planet (wyrazy co najmniej trzeciego rzędu względem e, i) amplituda zmian długości $48'$ dla Saturna i $20'$ dla Jowisza.
- ▶ $29n_0 - 72n'_0 = +1''.9823$, co odpowiada $T = 1800$ lat, ale wyrazy odpowiadające $(29\lambda - 72\lambda')$ nie pojawiają się przy wyrazach rozwinięcia względem e, i o rzędzie niższym niż 43.

Zależność Laplace'a

- ▶ Długookresowe perturbacje $\delta\rho$ i $\delta\rho'$ w średnich długościach $\lambda = \rho + \epsilon$ i $\lambda' = \rho' + \epsilon'$ dwóch planet, które wywołane są ich wzajemnym przyciąganiem związane są zależnością Laplace'a (1799):

$$m\sqrt{a}\delta\rho = -m'\sqrt{a'}\delta\rho'$$

- ▶ Dla Jowisza i Saturna ich długość przy uwzględnieniu głównego zaburzenia została przez Laplace'a określona jako

$$\lambda_J = n_J t + \epsilon_J + 20' \sin(5n_S t - 2n_J t + 49^\circ 8' 40'')$$

$$\lambda_S = n_S t + \epsilon_S - 46' 50'' \sin(5n_S t - 2n_J t + 49^\circ 8' 40'')$$

gdzie warunki początkowe były określone na rok 1700.

Wyrazy wiekowe wyznaczone przez Lagrange'a i Laplace'a

- ▶ Zastosowane zostało podstawienie

$$h = e \sin \pi \quad k = e \cos \pi$$

i

$$p = \operatorname{tg}(i) \sin(\Omega) \quad q = \operatorname{tg}(i) \cos(\Omega)$$

- ▶ Z otrzymanych równań na pochodne czasowe h , k , p i q zostały zachowane wyrazy najniższego rzędu w h , k , p i q i otrzymano równania dla wyrazów wiekowych.

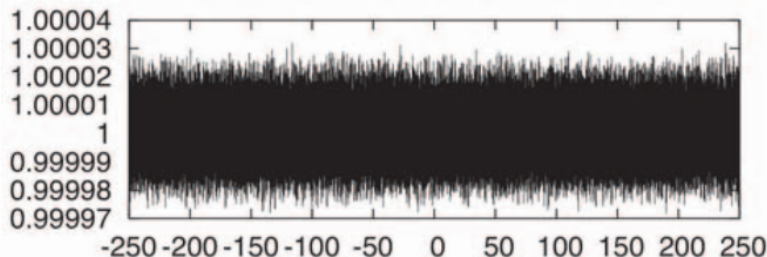
Wyrazy wiekowe dla ruchu peryhelium i mimośrodu -
Laskar et al. 2004, A&A, 428, 285.

	("'/yr)	Δ_{100}	Δ_{250}	Period (yr)
g_1	5.59	0.13	0.20	231 843
g_2	7.452	0.019	0.023	173 913
g_3	17.368	0.20	0.20	74 620
g_4	17.916	0.20	0.20	72 338
g_5	4.257452	0.000030	0.000030	304 407
g_6	28.2450	0.0010	0.0010	45 884
g_7	3.087951	0.000034	0.000048	419 696
g_8	0.673021	0.000015	0.000021	1 925 646
g_9	-0.34994	0.00063	0.0012	3 703 492

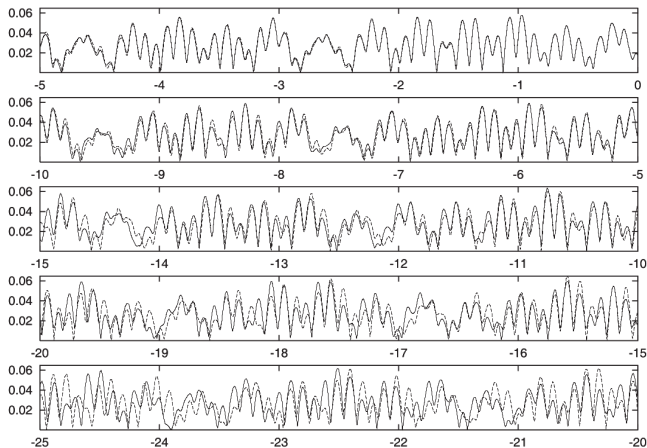
Wyraży wiekowe wyznaczone dla ruchu linii węzłów i nachylenia Laskar et al. 2004, A&A, 428, 285.

s_1	-5.59	0.15	0.16	231 843
s_2	-7.05	0.19	0.25	183 830
s_3	-18.850	0.066	0.11	68 753
s_4	-17.755	0.064	0.14	72 994
s_5	0.00000013	0.0000001	0.0000001	
s_6	-26.347855	0.000076	0.000087	49 188
s_7	-2.9925259	0.000025	0.000025	433 079
s_8	-0.691736	0.000010	0.000011	1 873 547
s_9	-0.34998	0.00051	0.0011	3 703 069

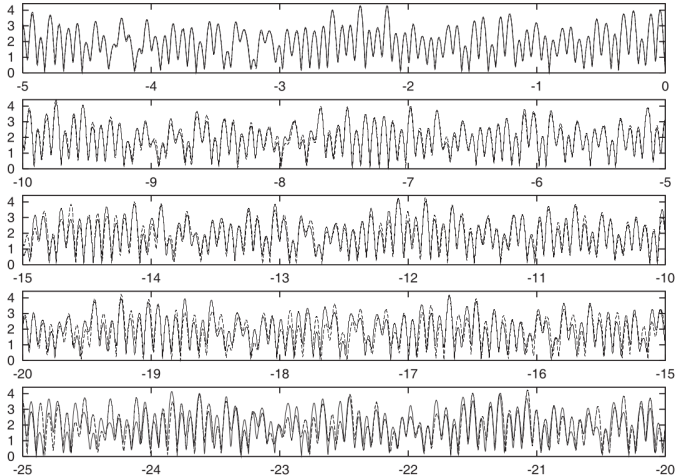
Zmiany elementów orbitalnych Ziemi (barycentrum układu Ziemia-Księżyc - obliczenia numeryczne - wielka półoś orbity w okresie od -250 do 250 milionów lat (Laskar et al. 2004).



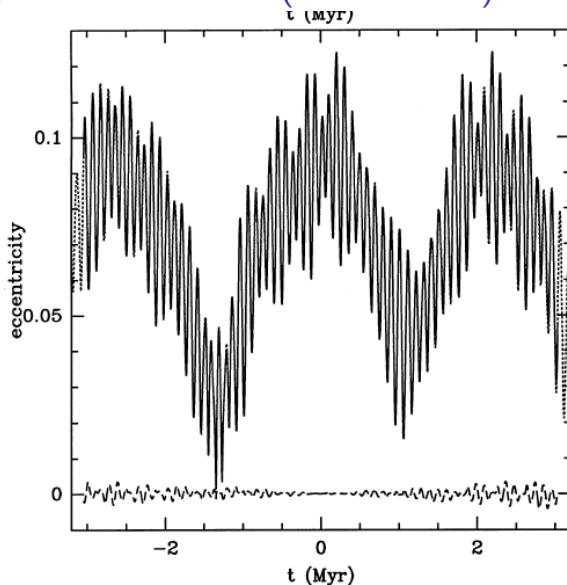
Zmiany elementów orbitalnych Ziemi (barycentrum układu Ziemia-Księżyc) - obliczenia numeryczne - mimośród (Laskar et al. 2004).



Zmiany elementów orbitalnych Ziemi (barycentrum układu Ziemia-Księżyc - obliczenia numeryczne - nachylenie płaszczyzny orbity (Laskar et al. 2004).



Zmiany elementów orbitalnych Marsa - obliczenia numeryczne - mimośród (Laskar 2012).



Ważniejsze rezonanse w układzie Słonecznym

Księżyc Jowisza

Io - Europa: $\lambda_I - 2\lambda_E + (\omega_E \text{ lub } \omega_I) = 0^\circ \text{ lub } 180^\circ$

Europa - Ganimedes: $\lambda_E - 2\lambda_G + \omega_E = 0^\circ$

Io - Europa - Ganimedes: $\lambda_I - 3\lambda_E + 2\lambda_G = 180^\circ$

Układ Saturna

Mimas - Tetyda: $2\lambda_M - 4\lambda_T + \Omega_M + \Omega_T = 0^\circ$

Enceladus - Dione: $\lambda_E - 2\lambda_D + \omega_E = 0^\circ$

Tytan - Hiperion: $3\lambda_T - 4\lambda_H + \omega_H = 180^\circ$

Mimas - przerwa Cassiniego: $\lambda_C - 2\lambda_M + \omega_C = 0^\circ$

Tytyda - Telesto (L4) - Kalipso (L5)

Dione - Helena (L4) - Polideukes (L5)

Ważniejsze rezonanse w układzie Słonecznym c.d.

Planetoidy - Jowisz

Grecy (L4), Trojanie (L5) ($\lambda - \lambda_J = \pm 60^\circ$)

Thule: $3\lambda_T - 4\lambda_J + \omega_T = 0^\circ$

Hilda: $2\lambda_H - 3\lambda_J + \omega_H = 0^\circ$

Gringua: $\lambda_G - 4\lambda_J + \omega_G = 0^\circ$

przerwy Kirkwooda 3:1, 5:2, 7:3, 2:1

Neptun - Pluton: $2\lambda_N - 3\lambda_P + \omega_P = 180^\circ$

Chaos w układzie planetarnym Słońca

- ▶ Obliczenia numeryczne obejmujące wielkie planety Układu Słonecznego (możliwość długiego kroku całkowania) prowadzone dla okresu 875 milionów lat (Sussman i Wisdom 1988) nie wykazywały dla nich zachowania chaotycznego. Stwierdzono chaos dla Plutona z czasem Liapunowa ok 20 My.
- ▶ Uwzględnienie planet typu ziemskiego daje zachowanie chaotyczne z czasem Liapunowa ok 5 My (Laskar 1989, Syssman i Wisdom 1992).
- ▶ Określanie trajektorii planet w okresie większym niż kilkadziesiąt milionów lat ma charakter statystyczny (niepewność położenia planet rośnie 10 razy na każde 10 My)