

Wykład 2 - zagadnienie dwóch ciał

20.02.2013

Drugie prawo dynamiki Newtona.

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (1)$$

może być zapisane jako zasada zachowania pędu

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (2)$$

Wzór Bineta

Gdy mamy ruch pod wpływem sił centralnych, radialną składową przyspieszenia w układzie biegunowym możemy zapisać jako:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$

czyli siła będzie równa

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2).$$

Pochodną czasową długości promienia wodzącego możemy zapisać jako

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi}$$

Wzór Bineta c.d.

Korzystając z faktu, że prędkość polowa ruchu planety ma być stała (drugie prawo Keplera, które jest szczególnym przypadkiem zasady zachowania momentu pędu) możemy otrzymać równanie toru ciała: $r^2\dot{\varphi} = C$ (w zagadnieniu dwóch ciał $C = J/\mu$) daje $\dot{\varphi} = C/r^2$ i

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{C}{r^2} = -C \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right)$$

czyli

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{C}{r^2} \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2}$$

co po podstawieniu do wzoru na siłę daje wzór Bineta

$$F = -\frac{mC^2}{r^2} \left(\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right)$$

Wzór Bineta i prawo powszechnego ciążenia

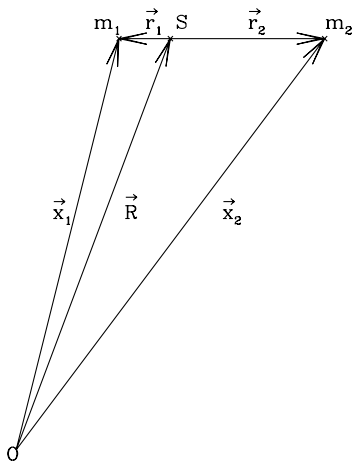
Podstawienie równania toru elipsy $r = p/(1 + e \cos \varphi)$, który opisuje tor planety w ruchu wokół Słońca (I prawo Keplera) do wzoru

$$F = -\frac{mC^2}{r^2} \left(\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right)$$

daje zależność siły od promienia:

$$F(r) = \frac{mC^2}{pr^2}$$

Zagadnienie dwóch ciał



Równania ruchu dwóch punktowych mas oddziałujących grawitacyjnie

Mamy dwa równania ruchu i aby je rozwiązać będziemy potrzebować 12 stałych całkowania.

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r}_{12}$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r}_{12}$$

Równania ruchu środka masy

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r}_{12}$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r}_{12}$$

Dodajemy równania stronami

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = 0$$

Ponieważ mamy ruch ciał o stałej masie, to

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2) = 0$$

Równanie ruchu środka masy c.d.

Wektor położenia środka masy jest określony jako

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

tak więc mamy

$$(m_1 + m_2) \cdot \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}$$

Środek masy porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Mamy sześć pierwszych stałych całkowania ($\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \dot{\vec{R}} t$)

Równanie ruchu względnego

Równania obustronnie dzielimy przez m_1 (pierwsze) i m_2 (drugie), a następnie odejmujemy równanie pierwsze od drugiego:

$$\frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = \frac{Gm_2}{r^3} \vec{r}_{12}$$

$$\frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{r^3} \vec{r}_{12}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = -\frac{G(m_2 + m_1)}{r^3} \vec{r}_{12}$$

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \vec{R} + \vec{r}_2 - \vec{R} - \vec{r}_1$$

Otrzymujemy równanie ruchu ciała drugiego względem pierwszego
Od tego momentu wektor położenia ciała drugiego względem pierwszego będziemy oznaczać jako $\vec{r} = \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Równanie ruchu względnego c.d.

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_2 + m_1)}{r^3}\vec{r}$$

Gdy pomnożymy stronami przez $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ otrzymamy odpowiednik równania ruchu punktu materialnego wokół nieruchomego centrum siły

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 m_2)}{r^3}\vec{r} = -\frac{\gamma}{r^3}\vec{r}$$

Zasada zachowania momentu pędu i drugie prawo Keplera

Równanie ruchu względnego mnożymy wektorowo przez $\vec{r}$ i otrzymujemy

$$\vec{r} \times \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = 0.$$

Korzystając z różniczkowania funkcji złożonej możemy zapisać, że

$$\vec{r} \times \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}} \times \mu \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}})$$

Tak więc mamy zasadę zachowania momentu pędu, czyli stałą wartość prędkości polowej (II prawo Keplera)

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}) = 0$$

czyli

$$(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}) = \text{const}$$

Aby sprawdzić czemu równa jest ta stała zapiszemy moment pędu układu względem środka masy

$$\vec{J}_s = m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2$$

Pamiętając, że

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

otrzymujemy

$$\vec{J}_s = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

Zasada zachowania energii

Równanie ruchu względnego pomnożymy teraz skalarnie przez $\dot{\vec{r}}$ i otrzymamy

$$\mu \dot{\vec{r}} \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\dot{\vec{r}} \cdot \frac{\gamma}{r^3} \vec{r}$$

a następnie

$$\frac{d}{dt} \left(\mu \frac{1}{2} (\dot{\vec{r}}^2) - \frac{\gamma}{r} \right) = 0$$

czyli

$$\left(\mu \frac{1}{2} (\dot{\vec{r}}^2) - \frac{\gamma}{r} \right) = \text{const}$$

Jeżeli zapiszemy równanie na energię w układzie środka masy

$$\frac{1}{2} (m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + m_2 \dot{\vec{r}}_2^2) - \frac{\gamma}{r} = \mathcal{E}_s$$

i skorzystamy z zależności na $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ otrzymamy

$$\left(\mu \frac{1}{2} (\dot{\vec{r}}^2) - \frac{\gamma}{r} \right) = \mathcal{E}_s$$

Od tej pory energię względem środka masy $\mathcal{E}_s$ będziemy zapisywać jako $\mathcal{E}$

Tor ruchu względnego

Ruch względny odbywa się w ustalonej płaszczyźnie i możemy go zapisać we współrzędnych biegunowych

$$J = \mu r^2 \dot{\varphi}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - \frac{\gamma}{r}$$

podstawiając $\dot{\varphi} = J/(\mu r^2)$ i $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} J/(\mu r^2)$ otrzymamy równanie toru

$$\frac{1}{2} \frac{J^2}{\mu r^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{J^2}{\mu r^4} - \frac{\gamma}{r} = \mathcal{E}$$

i następnie ..

Tor ruchu względnego c. d.

$$\frac{J^2}{2\mu} \left[\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{\gamma}{r} = \mathcal{E}.$$

Podstawiamy $r = 1/w$

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{w^2} \frac{dw}{d\varphi}$$

i otrzymujemy

$$\frac{J^2}{2\mu} \left[\left(\frac{dw}{d\varphi} \right)^2 + w^2 \right] - \gamma w = \mathcal{E}$$

i następnie

$$\frac{dw}{d\varphi} = \pm \left(-w^2 + \frac{2\mu\gamma}{J^2} w + \frac{2\mu\mathcal{E}}{J^2} \right)^{1/2}$$

Tor ruchu względnego c.d.

$$\frac{dw}{d\varphi} = \pm \left(-w^2 + \frac{2\mu\gamma}{J^2} w + \frac{2\mu\mathcal{E}}{J^2} \right)^{1/2}$$

Podstawienie $w = x + \mu\gamma/J^2$ prowadzi do równania

$$\frac{dx}{\left[\frac{\mu^2\gamma^2}{J^4} \left(1 + \frac{2\mathcal{E}J^2}{\mu\gamma^2} \right) - x^2 \right]^{1/2}} = \pm d\varphi$$

następnie $x = y \frac{\mu\gamma}{J^2} \left(1 + \frac{2\mathcal{E}J^2}{\mu\gamma^2} \right)^{1/2}$ daje już

$$\frac{dy}{(1 - y^2)^{1/2}} = \pm \varphi$$

Tor ruchu względnego c. d. - krzywe stożkowe, I prawo Keplera

Podstawienie $y = \cos \alpha$ daje rozwiązanie toru, które po powrocie do zmiennej r ma postać

$$\frac{\mu\gamma}{J^2} \left(1 + \frac{2\mathcal{E}J^2}{\mu\gamma^2}\right)^{1/2} \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{r}$$

i

$$r = \frac{\frac{J^2}{\mu\gamma}}{1 + \left(1 + \frac{2\mathcal{E}J^2}{\mu\gamma^2}\right)^{1/2} \cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

co jest równaniem krzywej stożkowej o własnościach określonych przez znak $\mathcal{E}$ (jeżeli $J^2 > 0$).

- ▶ $\mathcal{E} < 0$ ruch względny odbywa się po torze eliptycznym.

Stanowi to treść pierwszego prawa Keplera.

- ▶ $\mathcal{E} = 0$ równaniem toru jest parabola
- ▶ $\mathcal{E} > 0$ równaniem toru jest hiperbola.

Stałe p i e

W równaniu toru

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$p = \frac{J^2}{\mu \gamma}$$

$$e = \left(1 + \frac{2\mathcal{E} J^2}{\mu \gamma^2}\right)^{1/2}$$

Zależność pomiędzy energią a wielką półosią elipsy a

W przypadku $\mathcal{E} < 0$ i ruchu po elipsie największa i najmniejsza odległość wynosi odpowiednio $Q = p/(1 - e)$ i $q = p/(1 + e)$, w związku z tym wielka półoś elipsy

$$a = \frac{1}{2}(q + Q) = \frac{1}{2}p\left(\frac{1}{1 - e} + \frac{1}{1 + e}\right) = \frac{p}{1 - e^2}$$

co po podstawieniu daje

$$a = -\frac{\gamma}{2\mathcal{E}} = -\frac{Gm_1m_2}{2\mathcal{E}}$$

i zależność energii od wielkiej półosi elipsy

$$\mathcal{E} = -\frac{Gm_1m_2}{2a}$$

Prędkość orbitalna ruchu względnego

Korzystając z równania zachowania energii możemy podać wartość prędkości orbitalnej dla ruchu po orbicie eliptycznej $v = \dot{r}$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} = -\frac{Gm_1m_2}{2a}$$

otrzymamy

$$v = (G(m_1 + m_2))^{1/2} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)^{1/2}.$$

Korzystamy ze stałości prędkości polowej, która w okresie równym okresowi orbitalnemu P powinna dać pole elipsy $S = \pi ab$

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} \cdot P = \pi ab$$

Podstawimy wartość prędkości polowej dla najmniejszej odległości pomiędzy ciałami (wtedy nie mamy składowej radialnej prędkości)

III prawo Keplera

$$v = r\dot{\varphi} = (G(m_1 + m_2))^{1/2} \left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a} \right)^{1/2} =$$

$$v = (G(m_1 + m_2))^{1/2} \left(\frac{1}{a} \frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \cdot P = (G(m_1 + m_2))^{1/2} \left(\frac{1}{a} \frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} \cdot a(1-e) \cdot P = \pi a^2 (1-e^2)^{1/2}$$

otrzymujemy (uogólnione) III prawo Keplera

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

Zależność położenia od czasu.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{J^2}{\mu r^2} + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - \frac{\gamma}{r}$$

$$\dot{r}^2 = \frac{\gamma}{\mu} \left(\frac{2\mathcal{E}}{\gamma} + \frac{2}{r} - \frac{p}{r^2} \right) = \frac{\gamma}{\mu} \left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{r} - \frac{a(1-e^2)}{r^2} \right)$$

$$\frac{dr}{dt} = \left(\frac{\gamma}{\mu} \right)^{1/2} \left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{r} - \frac{a(1-e^2)}{r^2} \right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{e} \frac{rdr}{\left(a \left(1 - \left(\frac{a-r}{ae} \right)^2 \right) \right)^{1/2}} = \left(\frac{\gamma}{\mu} \right)^{1/2} dt$$

Zależność położenia od czasu c.d.

Podstawiamy $\xi = (a - r)/(ae)$ czyli $r = a(1 - e\xi)$ i $dr = -aed\xi$ i otrzymujemy

$$\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{1/2} a^{-3/2} dt = \frac{e\xi d\xi}{(1 - \xi^2)^{1/2}} - \frac{d\xi}{(1 - \xi^2)^{1/2}}$$

Mamy następujące rozwiązania:

Elipsa $a > 0$, $e < 1$, $\xi = \cos E$

$$\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{1/2} a^{-3/2} (t - t_0) = \arccos(\xi) - e(1 - \xi^2)^{1/2} = E - e \sin E$$

Hiperbola $a < 0$, $e > 1$, $\xi = \cosh(F)$

$$\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{1/2} |a|^{-3/2} (t - t_0) = -\operatorname{arccosh}(\xi) + e(\xi^2 - 1)^{1/2} = e \sinh F - F$$

Dla paraboli

$$\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{1/2} (t - t_0) = \frac{1}{3}(r + p)(2r - p)^{1/2}$$

Ruch po paraboli

Dla ruchu po paraboli najwygodniej jest skorzystać z faktu, że energia całkowita w układzie środka masy równa jest zero i korzystamy z zachowania momentu pędu.

Pamiętamy, że $p=2q$ (q - odległość w perycentrum)

$$r^2 \dot{\vartheta} = \sqrt{p\mu\gamma}$$

$$r = \frac{p}{1 + \cos(\vartheta)} = \frac{q}{\cos^2(\frac{\vartheta}{2})}$$

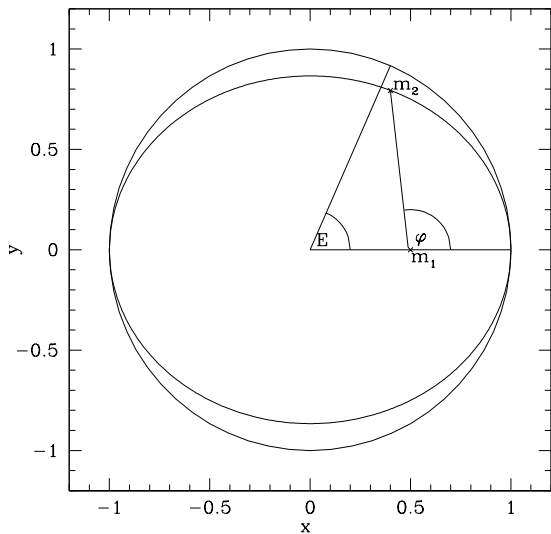
$$q^2 \sec^4(\frac{\vartheta}{2}) d\vartheta = \sqrt{2q\mu\gamma} dt$$

$$(1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\vartheta}{2}) d(\operatorname{tg}(\frac{\vartheta}{2}))) = \frac{\mu\gamma}{\sqrt{2}q^{3/2}} dt$$

jeżeli jako moment t_0 określimy przejście przez perycentrum to otrzymamy równanie Bakera

$$\operatorname{tg}(\frac{\vartheta}{2}) + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3(\frac{\vartheta}{2}) = \frac{\mu\gamma}{\sqrt{2}q^{3/2}} (t - t_0)$$

Anomalia mimośrodowa



Związek anomalii mimośrodowej i anomalii prawdziwej dla elipsy

$$r \cos \vartheta = a(\cos E - e)$$

$$r \sin \vartheta = b \cos E = (1 - e^2)^{1/2} \cos E$$

Pozwala to na otrzymanie następujących zależności:

$$\cos \vartheta = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}$$

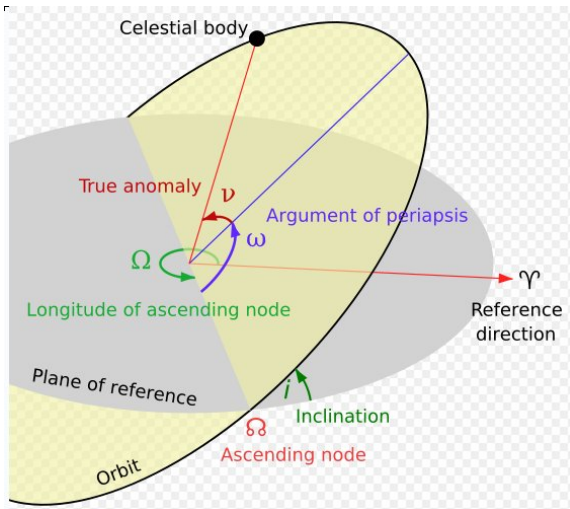
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg}\left(\frac{E}{2}\right)$$

Stałe ruchu względnego w zagadnieniu dwóch ciał

Mamy sześć stałych ruchu dla ruchu względnego dwóch ciał:
W rozwiązaniu z poprzedniego wykładu były to

- ▶ Energia liczona w układzie środka masy
- ▶ trzy składowe momentu pędu liczone względem środka masy
- ▶ kąt ϑ_0 , który przyjęliśmy 0 dla najmniejszej odległości pomiędzy obu ciałami.
- ▶ wyróżniony moment czasu w którym $\vartheta = \vartheta_0$

Elementy orbity eliptycznej



Rysunek: Elementy orbity: rozmiar wielkiej półosi, mimośród, nachylenie płaszczyzny orbity do płaszczyzny ekliptyki, długość węzła wstępującego, odległość perycentrum, moment przejścia przez perycentrum

Elementy orbity eliptycznej c. d.

Ze względów praktycznych związanych z obserwacjami za sześć stałych ruchu względnego w zagadnieniu dwóch ciał najczęściej przyjmujemy:

- ▶ a - wielka półoś orbity
- ▶ e - mimośród orbity
- ▶ i - nachylenie orbity do wyróżnionej płaszczyzny (dla orbit wokółsłonecznych jest to płaszczyzna ekliptyki)
- ▶ Ω - długość węzła wstępującego (dla orbit wokółsłonecznych odległość węzła wstępującego od punktu Barana)
- ▶ ω - odległość perycentrum od węzła wstępującego
- ▶ t_0 - moment przejścia przez perycentrum

Czasem użyteczne jest korzystanie z długości perycentrum

$$\pi = \omega + \Omega.$$

W związku z tym oprócz anomalii prawdziwej θ możemy się spotkać z argumentem szerokości $u = \theta + \omega$ i prawdziwą długością orbitalną

$$l = \theta + \omega + \Omega = \theta + \pi$$