

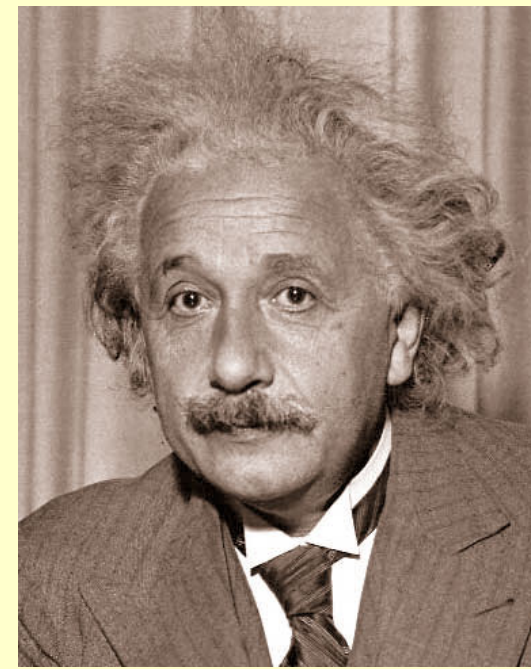
Soczewkowanie grawitacyjne 1

- Historia
- Ugięcie promieni świetlnych
- Opóźnienie sygnałów
- Deformacja obrazów
- Wzmocnienie strumienia energii

Historia

- Newton (1704) „Czy grawitacja zakrzywia promienie?”
- Michell (1783), Laplace (1796) „uwięzienie fotonów”
- Soldner (1801) wzór na ugięcie
- Einstein (1915) – OTW – ugięcie 2x większe!
- Eddington (1919) pomiar (?) podczas zaćmienia ==> OTW lepsza
- Chwolson (1924) podwójne obrazy gwiazd?
- Einstein (1936) wzór na wzmocnienie dla punktowej masy
- Zwicky(1937) – podwójne obrazy galaktyk?
- Walsh, Carswell i Weyman (1979) podwójny QSO 0957+561

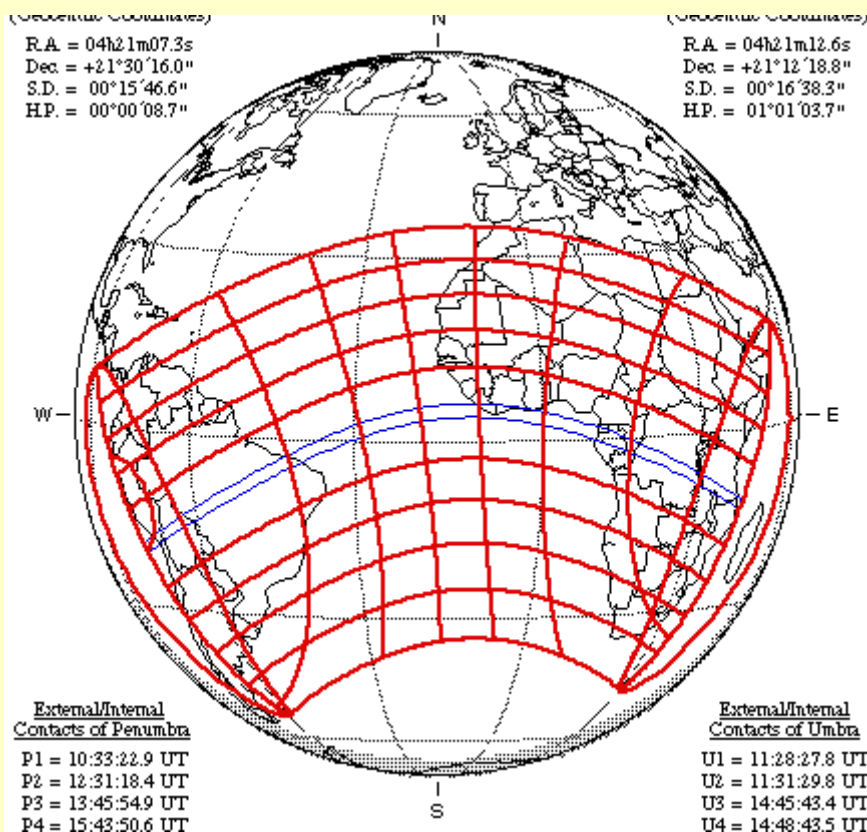
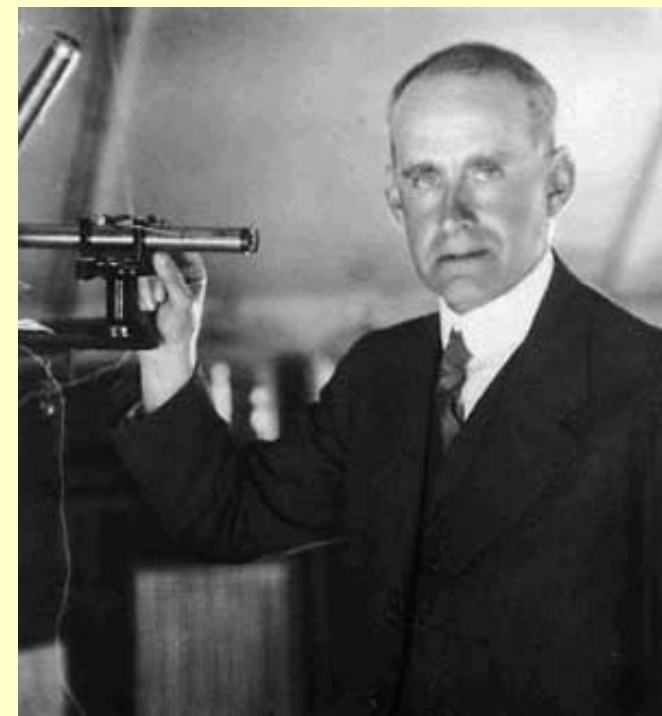
Einstein



- 1911 wzór Soldnera
- 1912 zaćmienie w Argentynie, zła pogoda
- 1914 zaćmienie na Krymie 21.VIII, niemiecka ekspedycja internowana
- 1915 poprawienie wzoru
- Einstein --> deSitter --> Eddington: pomiar kąta testem OTW

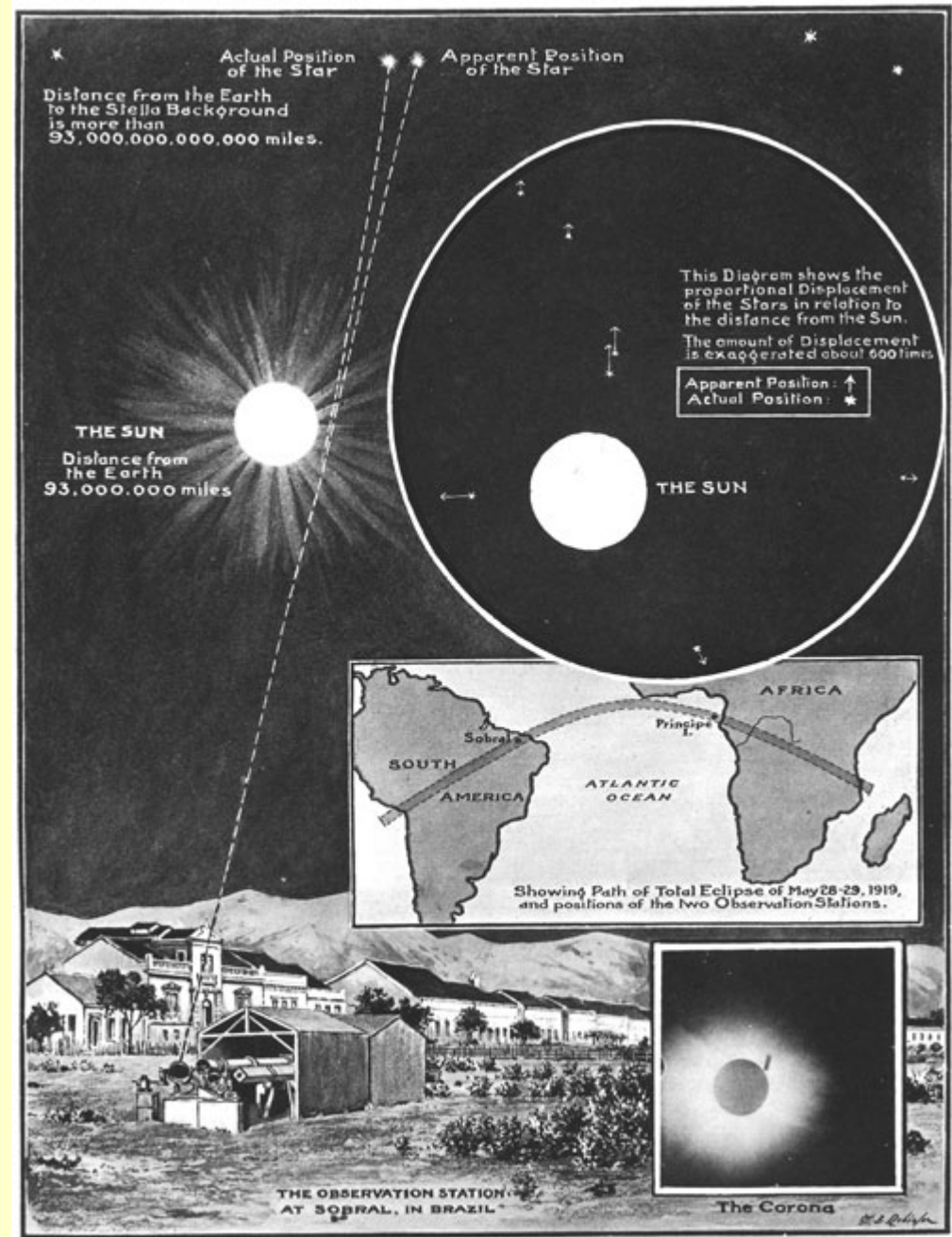
Eddington

- Zastępcza służba wojskowa
- 1919 organizacja ekspedycji do Płd. Ameryki (Sobral) i Afryki (Principe)
- 29.V.1919 zaćmienie na tle Hiad



Obserwacje Eddingtona

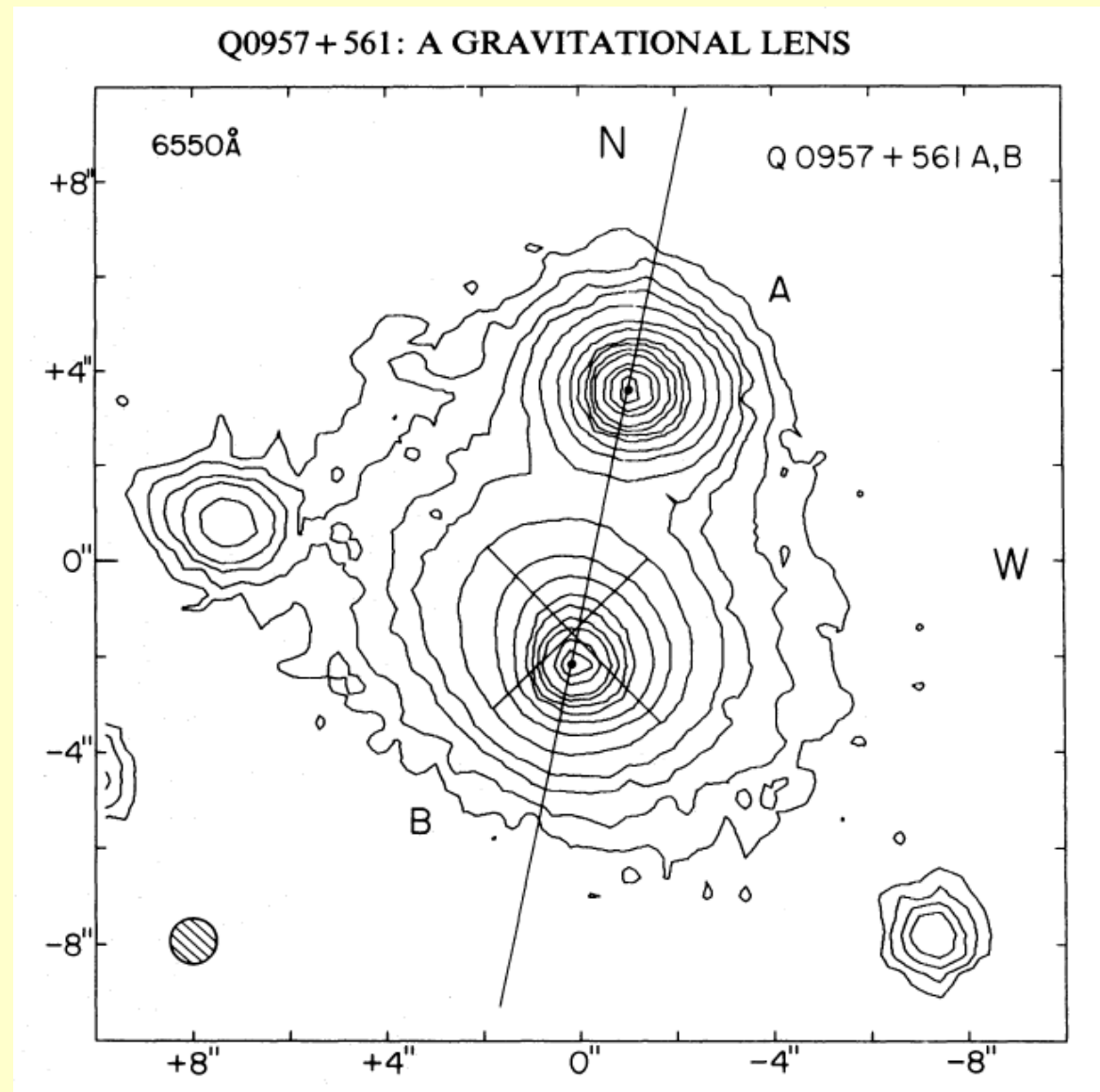
The results obtained by the British expeditions to observe the total eclipse of the sun last May verified Professor Einstein's theory that light is subject to gravitation. Writing in our issue of November 15 [1919], **Dr. A.C. Crommelin, one of the British observers, said:** "The eclipse was specially favourable for the purpose, there being no fewer than twelve fairly bright stars near the limb of the sun. The process of observation consisted in taking photographs of these stars during totality, and comparing them with other plates of the same region taken when the sun was not in the neighbourhood. Then if the starlight is bent by the sun's attraction, the stars on the eclipse plates would seem to be pushed outward compared with those on the other plates. The second Sobral camera and the one used at Principe agree in supporting Einstein's theory. It is of profound philosophical interest. Straight lines in Einsteins space cannot exist; they are parts of gigantic curves."



Illustrated London News of November 22, 1919.

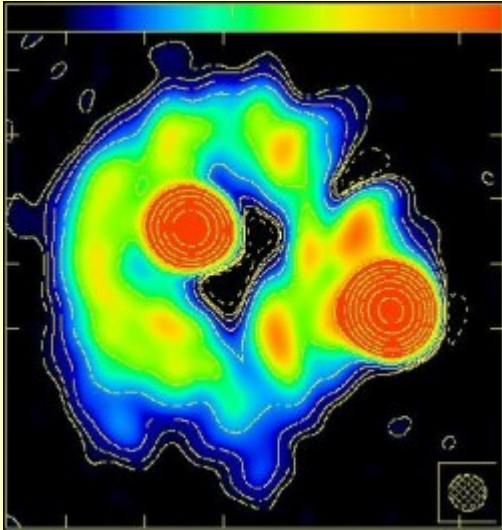
QSO 0957+561 A,B

Odkrycie:
Walsh, Carswell & Weyman
(1979) Nature, 279, 381



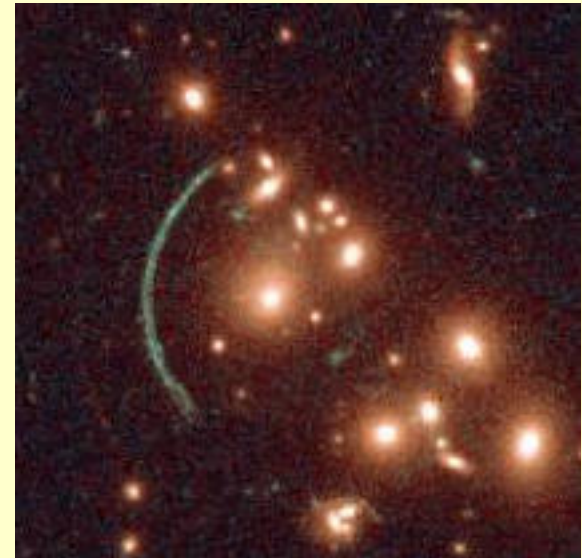
Ten zredukowany obraz optyczny:
Young et al (1980) ApJ,241,507

Inne efekty

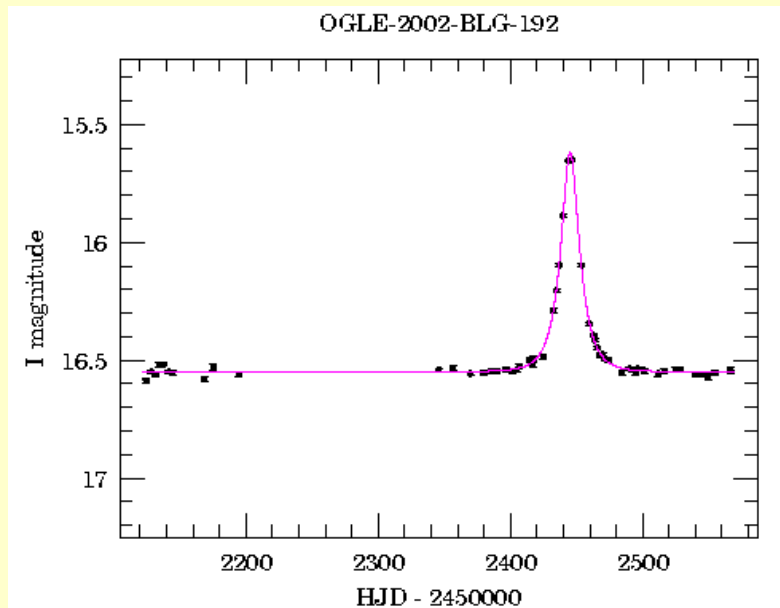


Obrazy w kształcie ~pierścieni
tutaj: CLASS B0218+357, mapa
radiowa. A. Biggs, Jodrell Bank

Jasne łuki w gromadach galaktyk

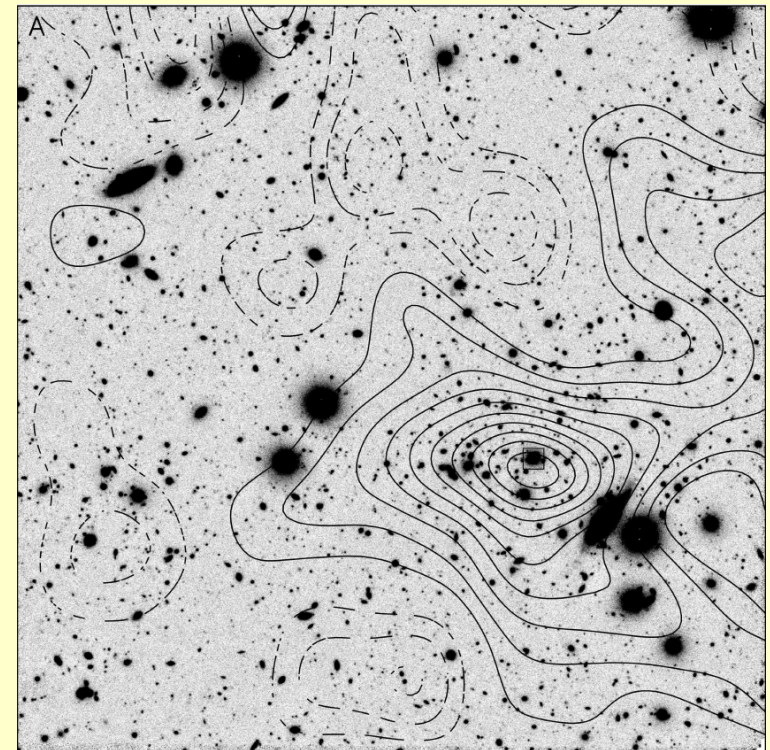


Inne efekty

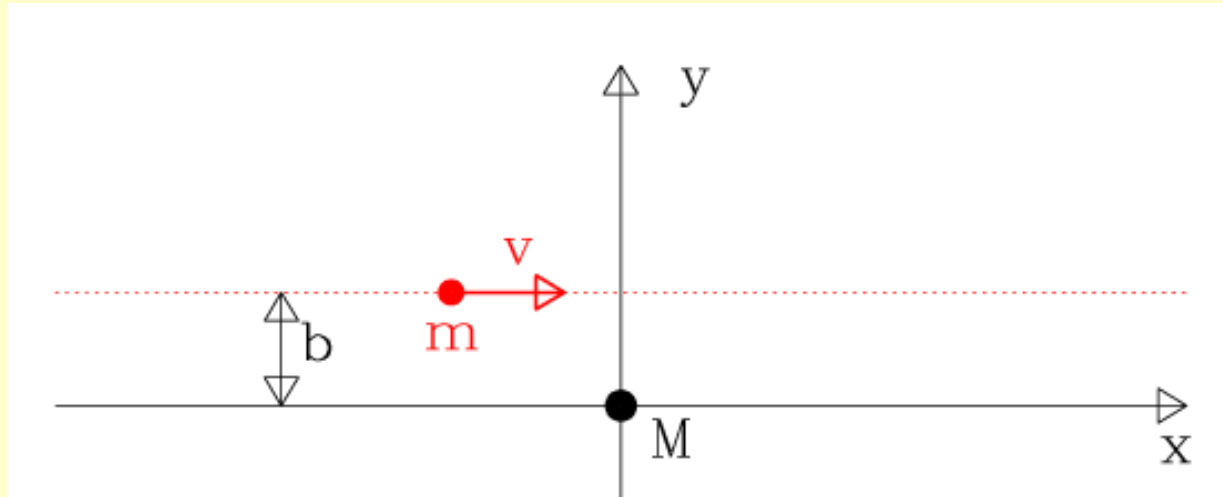


Mikrosoczewkowanie gwiazd Galaktyki

Słabe soczewkowanie – deformacje obrazów obiektów leżących w tle (np. Gromady galaktyk)



Ugięcie: wzór Soldnera



$$\frac{dp_y}{dt} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{b}{r}; \quad v^2 \gg \frac{GM}{b}$$

$$|\Delta p_y| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{GMmb}{(x^2 + b^2)^{3/2}} \frac{dx}{v} = \frac{2GMm}{vb}$$

$$|\alpha| = \frac{|\Delta p_y|}{p_x} = \frac{|\Delta p_y|}{mv} = \frac{2GM}{v^2 b} \rightarrow \frac{2GM}{c^2 b}$$

Ugięcie: wzór Einsteina

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

punktowa masa: $\phi = -\frac{GM}{r}$

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = -1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

$$u^a \approx \gamma(1, v/c, 0, 0) \quad u_a \approx \gamma(1, -v/c, 0, 0)$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\frac{du_y}{ds} = \frac{1}{2} g_{00,y} u^0 u^0 + \frac{1}{2} g_{xx,y} u^x u^x$$

$$= \gamma^2 (1 + v^2/c^2) \frac{GMb}{c^2 (x^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$ds \approx c dt \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{cdt}{\gamma} = \frac{cdx}{v\gamma}$$

$$\Delta u_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du_y}{ds} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du_y}{ds} \frac{cdx}{v\gamma}$$

$$\left| \frac{\Delta u_y}{u_x} \right| = (1 + v^2/c^2) \frac{\gamma^2}{\gamma * \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{GMb}{v^2 (x^2 + b^2)^{3/2}} dx$$

$$= (1 + v^2/c^2) \frac{2GM}{v^2 b} \rightarrow \frac{4GM}{c^2 b}$$

$$\alpha_{Einstein} = 2 \times \alpha_{Soldner}$$

Ugięcie: poprawność przybliżenia słabego pola

- Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowy promień przechodzi bliżej niż $100 \cdot GM/c^2$ od masy M ? $\Leftrightarrow$ Jakiej części masy M można oczekiwać w walcu o promieniu podstawy $100GM/c^2$ i długości 10kpc (dla Galaktyki) lub 1000Mpc (dla Wszech-świata)?

Model: cała materia w postaci zwartych obiektów o tych samych masach M i średniej gęstości ρ . Interesująca odległość od masy: $r = 100GM/c^2$.

$$P = \frac{\rho * \pi r^2 d}{M}$$

Galaktyka:

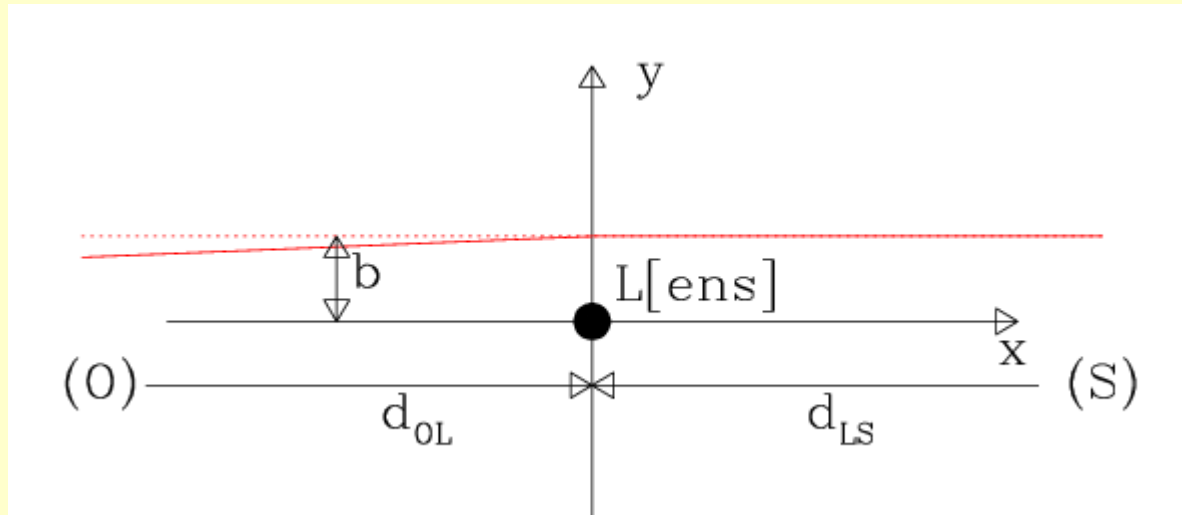
$$\rho \approx 10^{-24} \text{g/cm}^3 \quad d = 10 \text{kpc} \quad P = 5 \times 10^{-20} \frac{M}{M_{\odot}}$$

Wszechświat:

$$\rho \approx 10^{-30} \text{g/cm}^3 \quad d = 10^3 \text{Mpc} \quad P = 5 \times 10^{-21} \frac{M}{M_{\odot}}$$

Wyjątek: samo źródło leży w pobliżu BH/NS – wtedy “silne pole” może mieć znaczenie.

Ugięcie: zasada superpozycji



Obszar zajęty przez materię soczewki mały w porównaniu do odległości obserwator – soczewka – źródło $\implies$ można zastąpić gęstość 3D jej 2D rzutem

Promień można przedstawiać jako 2 odcinkowe łamane o wierzchołkach w tej samej płaszczyźnie
– płaszczyźnie soczewki

$$\alpha_{\odot} \leq \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \approx 1''.7 \approx 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\Rightarrow d_{OL}, d_{LS}, d_{OS} \gg b$$

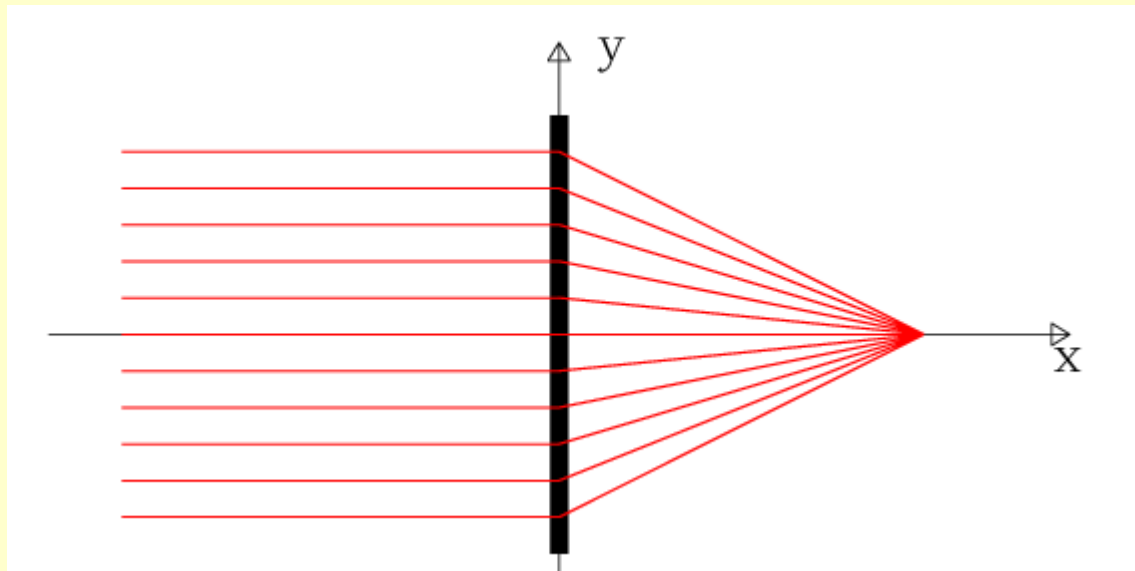
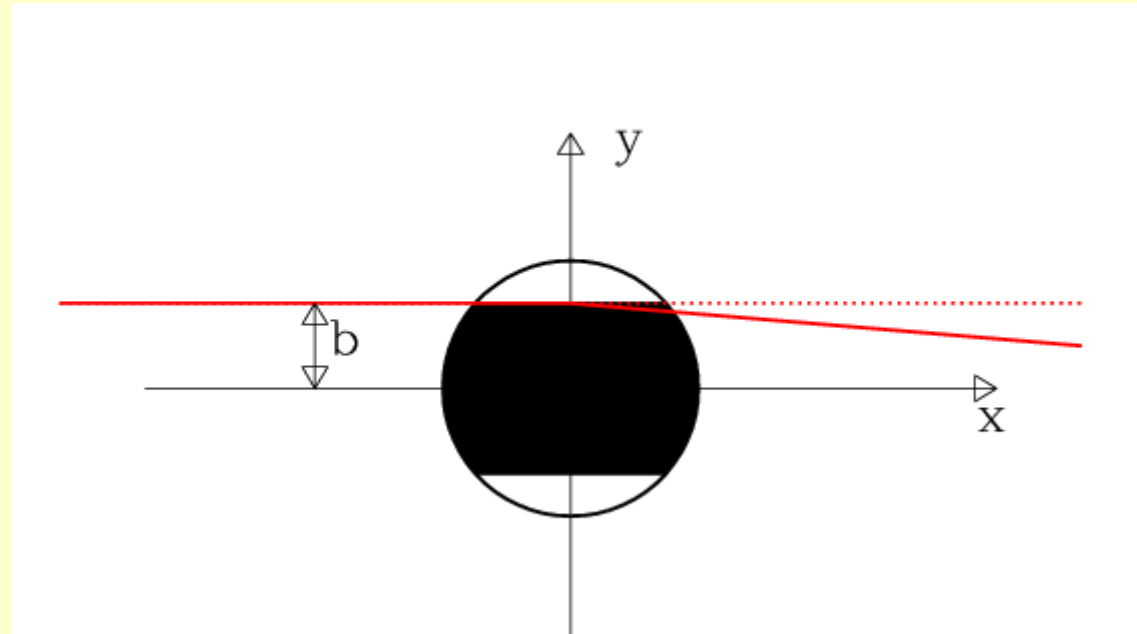
$$\Sigma_L(y, z) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_L(x, y, z) dx$$

$$\vec{\alpha} \equiv (\alpha_y, \alpha_z) \quad \vec{b} \equiv (y, z)$$

$$\vec{\alpha}(\vec{b}) = \int d_2 b' \frac{4G \Sigma_L(\vec{b}') (\vec{b}' - \vec{b})}{c^2 |\vec{b}' - \vec{b}|^2}$$

Zasada superpozycji

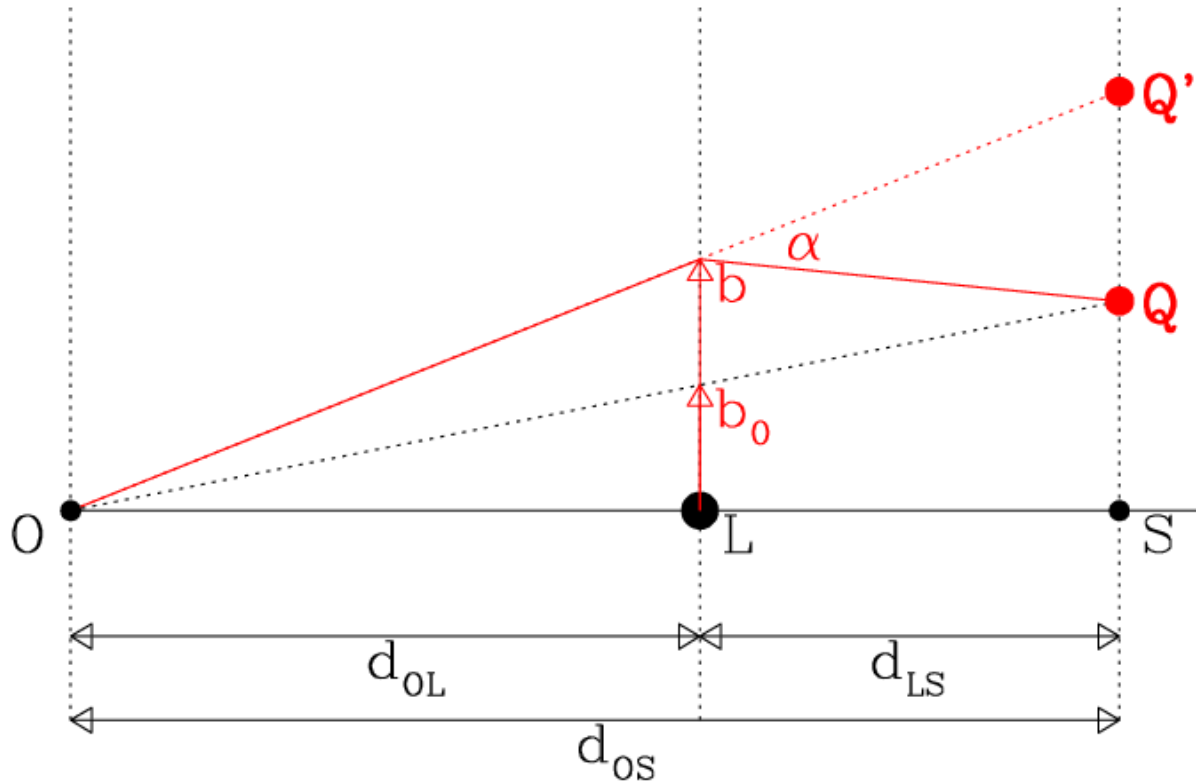
Sferyczna “soczewka” $\Rightarrow$ osiowo symetryczny rozkład 2D $\Rightarrow$ zakrzywia część masy wewnątrz walca



$$\begin{aligned}\Sigma &= \text{const} & M_{walec}(b) &= \pi \Sigma b^2 \\ |\alpha(b)| &= \frac{4GM_{walec}(b)}{c^2 b} = \frac{4\pi G \Sigma}{c^2} b \\ \Rightarrow f &= \frac{b}{|\alpha(b)|} = \frac{c^2}{4\pi G \Sigma}\end{aligned}$$

Kołowa tarcza o stałej gęstości powierzchniowej, prostopadła do wiązki „działa” jak soczewka skupiająca.

Równanie *na obrazy*



$$\vec{SQ} = \vec{SQ'} + \vec{Q'Q}$$

$$\frac{d_{OS}}{d_{OL}} \vec{b}_0 = \frac{d_{OS}}{d_{OL}} \vec{b} + d_{LS} \vec{\alpha}$$

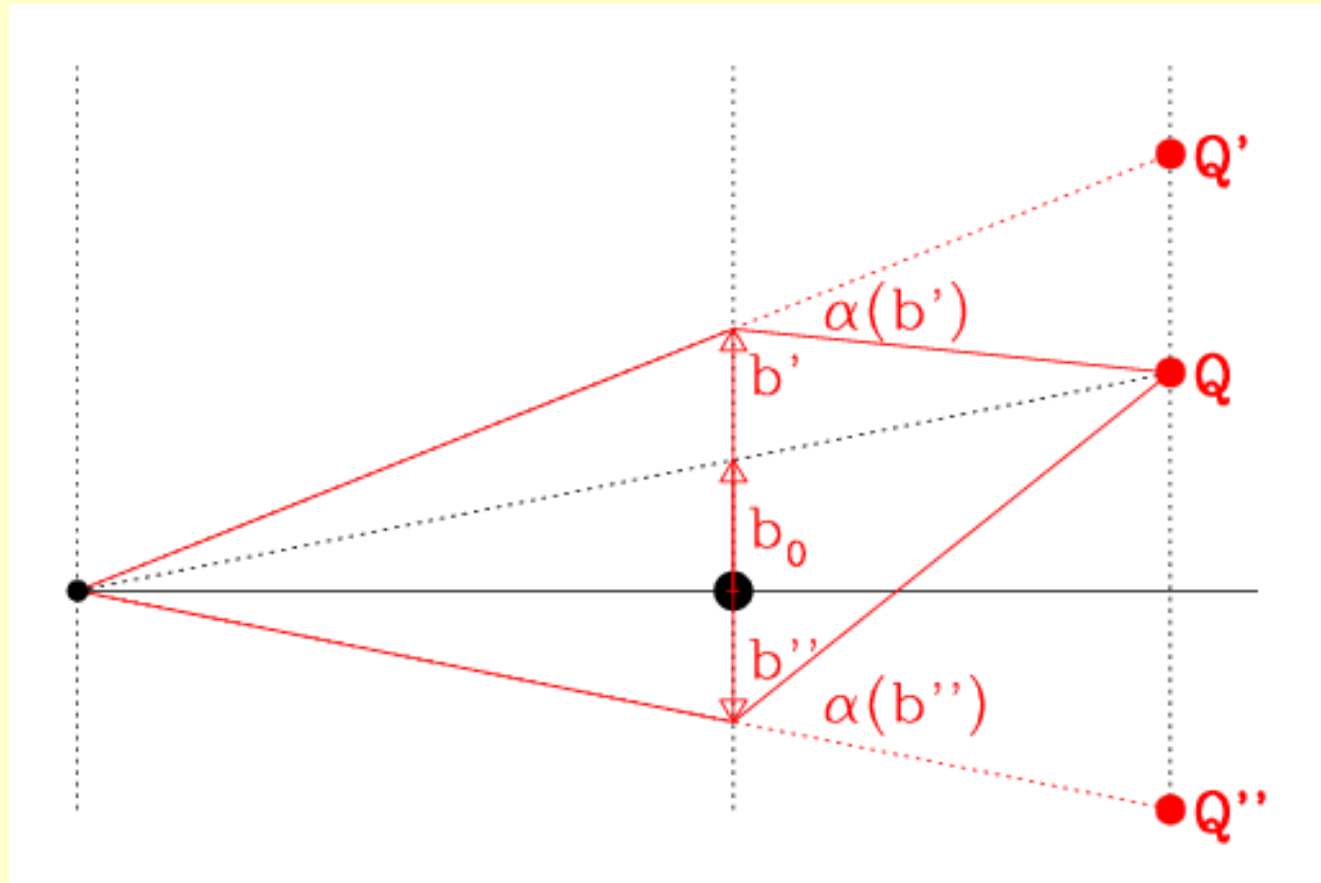
$$\vec{b}_0 = \vec{b} + \frac{d_{OL} d_{LS}}{d_{OS}} \vec{\alpha}$$

$$\vec{b}_0 = \vec{b} + D \vec{\alpha}$$

$$\vec{\beta}_0 = \vec{\beta} + \frac{d_{LS}}{d_{OS}} \vec{\alpha}$$

Ugięcie jest **w kierunku masy**. Stąd znak w równaniu w zapisie wektorowym.

Wielokrotne obrazy?



Równanie *na obrazy* na ogół nie jest liniowe i ustalonemu położeniu źródła (b_0) może odpowiadać więcej niż jeden obraz (tu: b' , b'')

Przykład: punktowa soczewka

$$\vec{b}_0 = \vec{b} + D \frac{-4GM}{c^2} \frac{\vec{b}}{b^2}$$

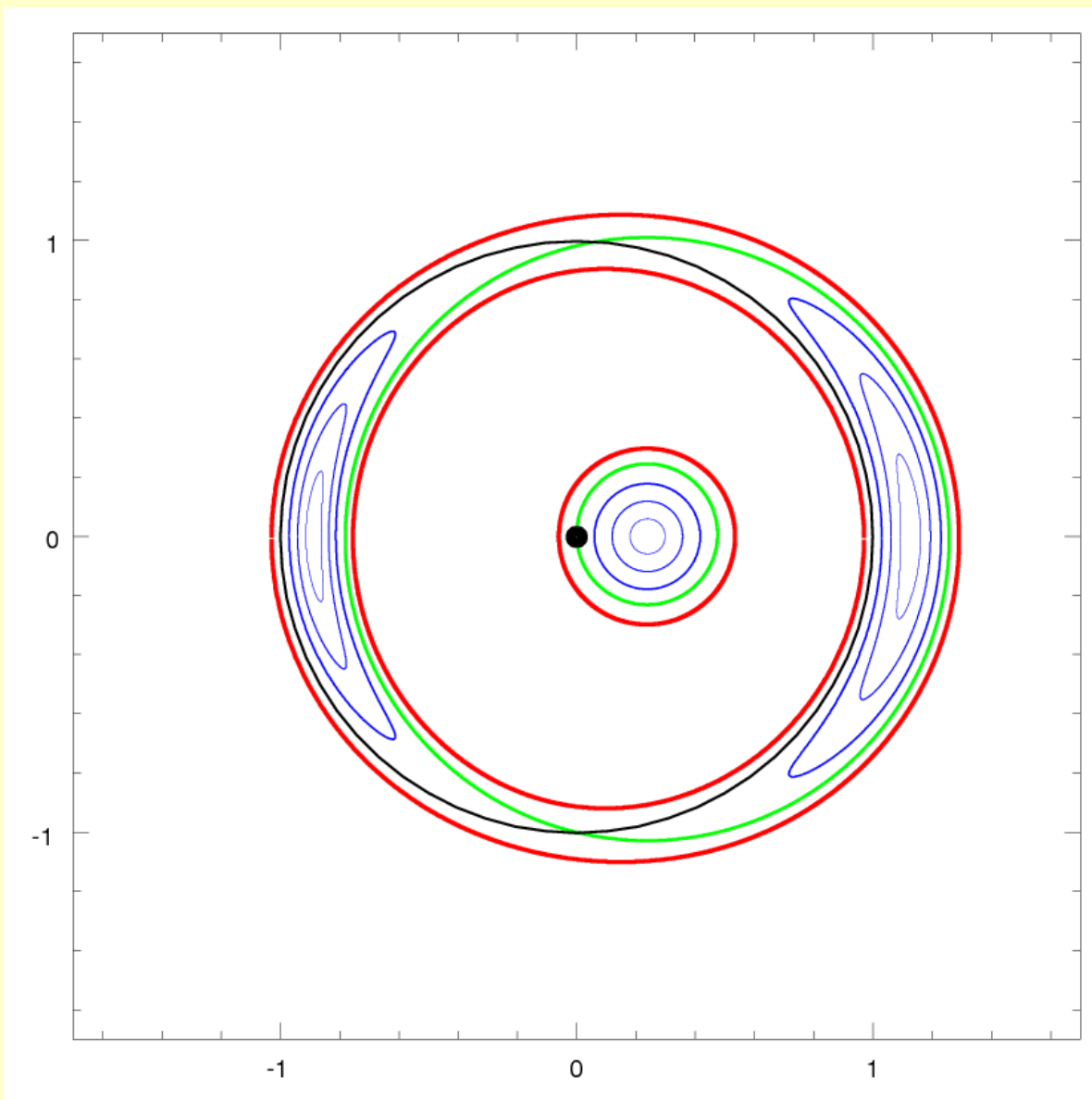
$$b^2 - b_0 b - r_E^2 = 0 \quad r_E \equiv \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{d_{OL} d_{LS}}{d_{OS}}}$$

$$b = \frac{b_0 \pm \sqrt{b_0^2 + 4r_E^2}}{2} \quad b_0 \neq 0$$

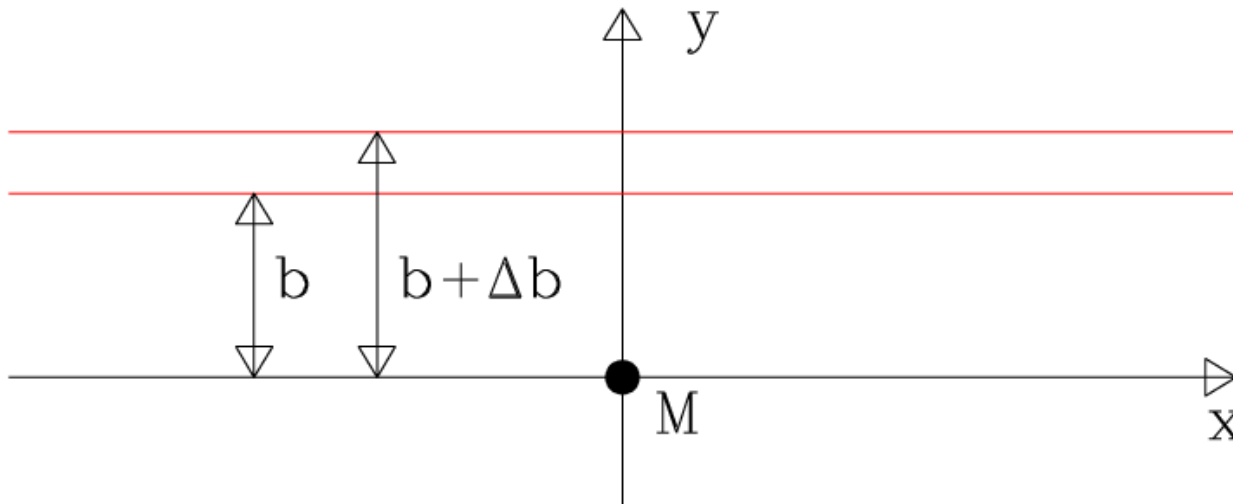
$$|\vec{b}| = r_E \quad b_0 = 0$$

Punktowa soczewka: topologia obrazów

Rysunek obok otrzymano rozwiązując równanie na obrazy (kolejno) dla wszystkich punktów na brzegu źródeł niebieskich oraz zielonego i czerwonego



Opóźnienie sygnałów w polu grawitacyjnym



$$\vec{\alpha}(\vec{b}) = \nabla (ct_{grav}(\vec{b}))$$

$$ds = 0 \Rightarrow cdt = \sqrt{\frac{1 + \frac{2GM}{c^2 r}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} dx \approx \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dx$$

$$cdt(\vec{b} + \Delta\vec{b}) - cdt(\vec{b}) = \Delta\vec{b} \frac{\partial}{\partial \vec{b}} \int \frac{2GM}{c^2 \sqrt{x^2 + b^2}} dx$$

$$= -\Delta\vec{b} \int \frac{2GM\vec{b}}{c^2 (x^2 + b^2)^{3/2}} dx = \Delta\vec{b} \frac{-4GM\vec{b}}{c^2 |\vec{b}|^2}$$

Opóźnienie sygnałów w polu grawitacyjnym

$$\vec{\alpha}(\vec{b}) = \sum_i \frac{4Gm_i(\vec{b}_i - \vec{b})}{c^2|\vec{b}_i - \vec{b}|^2}$$

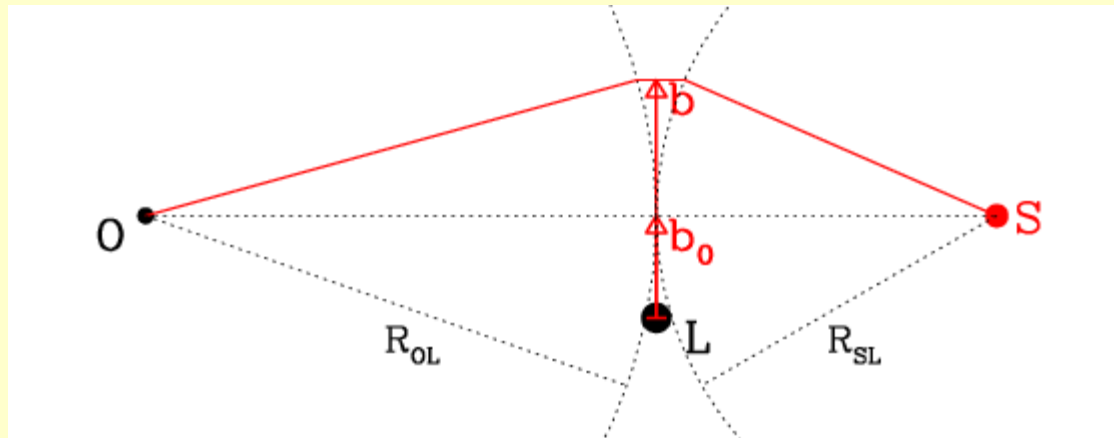
$$\rightarrow \int d_2b' \frac{4G\Sigma_L(\vec{b}')(\vec{b}' - \vec{b})}{c^2|\vec{b}' - \vec{b}|^2}$$

$$c\Delta t_{grav}(\vec{b}) = - \sum_i \frac{4Gm_i}{c^2} \ln(|\vec{b}_i - \vec{b}|)$$

$$\rightarrow - \int d_2b' \frac{4G\Sigma_L(\vec{b}')}{c^2} \ln(|\vec{b}' - \vec{b}|)$$

(Wzory dla układu punktowych mas oraz ciągłego rozkładu gęstości powierzchniowej.)

Zasada Fermata



$$c\Delta t_{geom} = \frac{(\vec{b} - \vec{b}_0)^2}{2R_{OL}} + \frac{(\vec{b} - \vec{b}_0)^2}{2R_{SL}}$$

$$c\Delta t = c\Delta t_{geom} + c\Delta t_{grav}$$

Fermat: dla **rzeczywistych** promieni $\nabla(c\Delta t) = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{R_{OL}} + \frac{1}{R_{SL}} \right) (\vec{b} - \vec{b}_0) + \vec{\alpha}(\vec{b}) = 0$$

Dla $R_{OL} = d_{OL}$, $R_{SL} = d_{LS}$ & $d_{OS} = d_{OL} + d_{LS}$

$$\Rightarrow \vec{b}_0 = \vec{b} + \frac{d_{OL}d_{LS}}{d_{OS}} \vec{\alpha}(\vec{b})$$

Powyższe pokazuje, iż w czasoprzestrzeni asymptotycznie płaskiej (zakrzywionej tylko w bezpośrednim otoczeniu soczewki) **zasada Fermata jest równoważna równaniu na obrazy**. (Później przekonamy się, że to samo dotyczy także przypadku ogólniejszego)

Funkcja Fermata i liczba obrazów

Różnice czasu propagacji opisuje funkcja Fermata Ψ :

$$\Psi(\vec{b}) = D c \Delta t = \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{b}_0)^2 + D c \Delta t_{grav}(\vec{b})$$

Rzeczywiste promienie mogą przecinać płaszczyznę soczewki w punktach gdzie $\nabla \Psi(\vec{b}) = 0$, czyli w jej minimach, maksimach i punktach siodłowych.

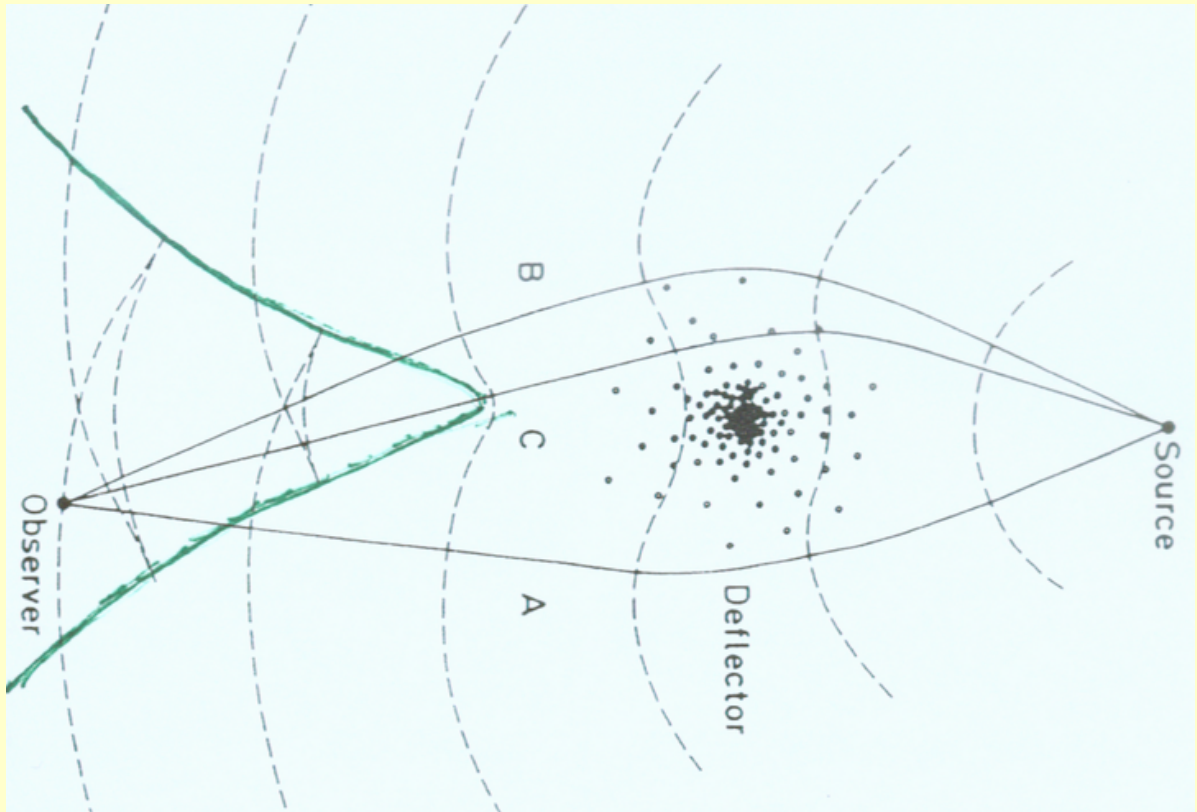
$$|\vec{b}| \rightarrow \infty \Rightarrow \Psi \approx \frac{1}{2} \vec{b}^2$$

$\Rightarrow$ istnieje co najmniej 1 minimum.

Dla ciągłego i ograniczonego w przestrzeni rozkładu gęstości funkcja Fermata jest gładka. Wtedy można pokazać, iż liczba jej ekstremów wynosi:

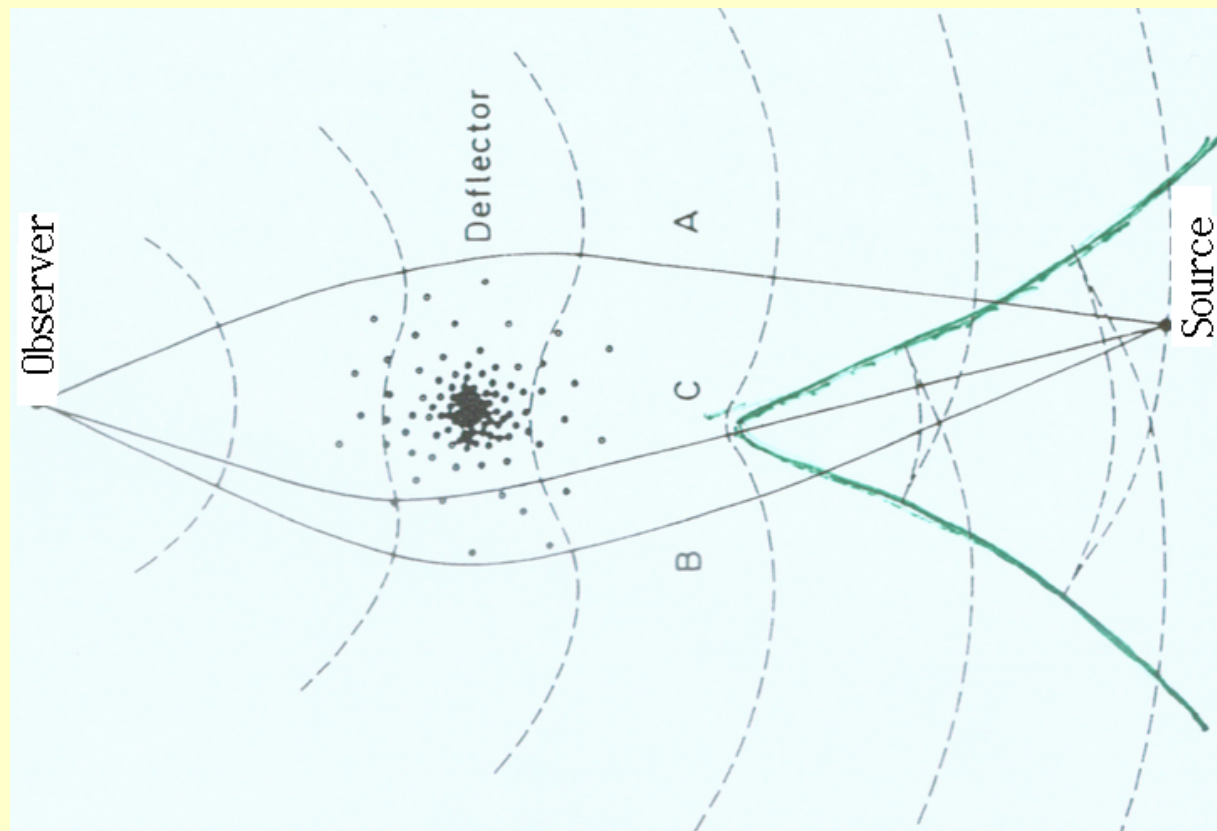
$$N_{obrazy} = 1 + 2 N_{p.siodlowe}$$

Propagacja fal



- Pole grawitacyjne --> opóźnienie --> deformacja
- Promienie zawsze prostopadłe do powierzchni stałej fazy
- Czoło fali z „wkłęśnięciem” --> nietrywialna topologia
- Wewnątrz **powierzchni kaustycznych** do obserwatora docierają kolejno (A,B,C) trzy fragmenty czoła fali z różnych kierunków

Propagacja fal



- Podejście astronomiczne: gdzie znajdowały się rejestrowane obecnie fotony przed czasem t , $2t$, $3t$... Formalnie oznacza to śledzenie promieni świetlnych biegnących wstecz w czasie (“backward ray shooting”)
- Źródła wewnątrz **powierzchni kaustycznych** mają wielokrotne obrazy; przedstawiają one źródło w różnych momentach czasu.

Deformacja obrazów

$$\vec{b}_0 = \vec{b} + D\vec{\alpha}(\vec{b}) = \vec{b} + D \int d_2 b' \frac{4G\Sigma(\vec{b}')}{c^2} \frac{\vec{b}' - \vec{b}}{|\vec{b}' - \vec{b}|^2}$$

$$\vec{b}_0 + d\vec{b}_0 = \vec{b}_0 + \underbrace{\left\| \frac{\partial \vec{b}_0}{\partial \vec{b}} \right\|}_{\|A\|} d\vec{b}$$

$$\|A_{ij}\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{array} \right\|$$

Dla $\Sigma = \text{const}$ ogniskowa $f = \frac{c^2}{4\pi G\Sigma}$.

$$\frac{1}{d_{OL}} + \frac{1}{d_{LS}} = \frac{1}{f} \Leftrightarrow D = f \Rightarrow \Sigma_{crit} = \frac{c^2}{4\pi G D}$$

$$\kappa = \frac{\Sigma}{\Sigma_{cr}} \quad \Sigma_{cr} \equiv \frac{c^2}{4\pi G D}$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{\pi} \int d_2 b' \frac{\Sigma(\vec{b}')}{\Sigma_{cr}} \frac{(b_1 - b'_1)^2 - (b_2 - b'_2)^2}{|\vec{b} - \vec{b}'|^4}$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{\pi} \int d_2 b' \frac{\Sigma(\vec{b}')}{\Sigma_{cr}} \frac{2(b_1 - b'_1)(b_2 - b'_2)}{|\vec{b} - \vec{b}'|^4}$$

Deformacja obrazów

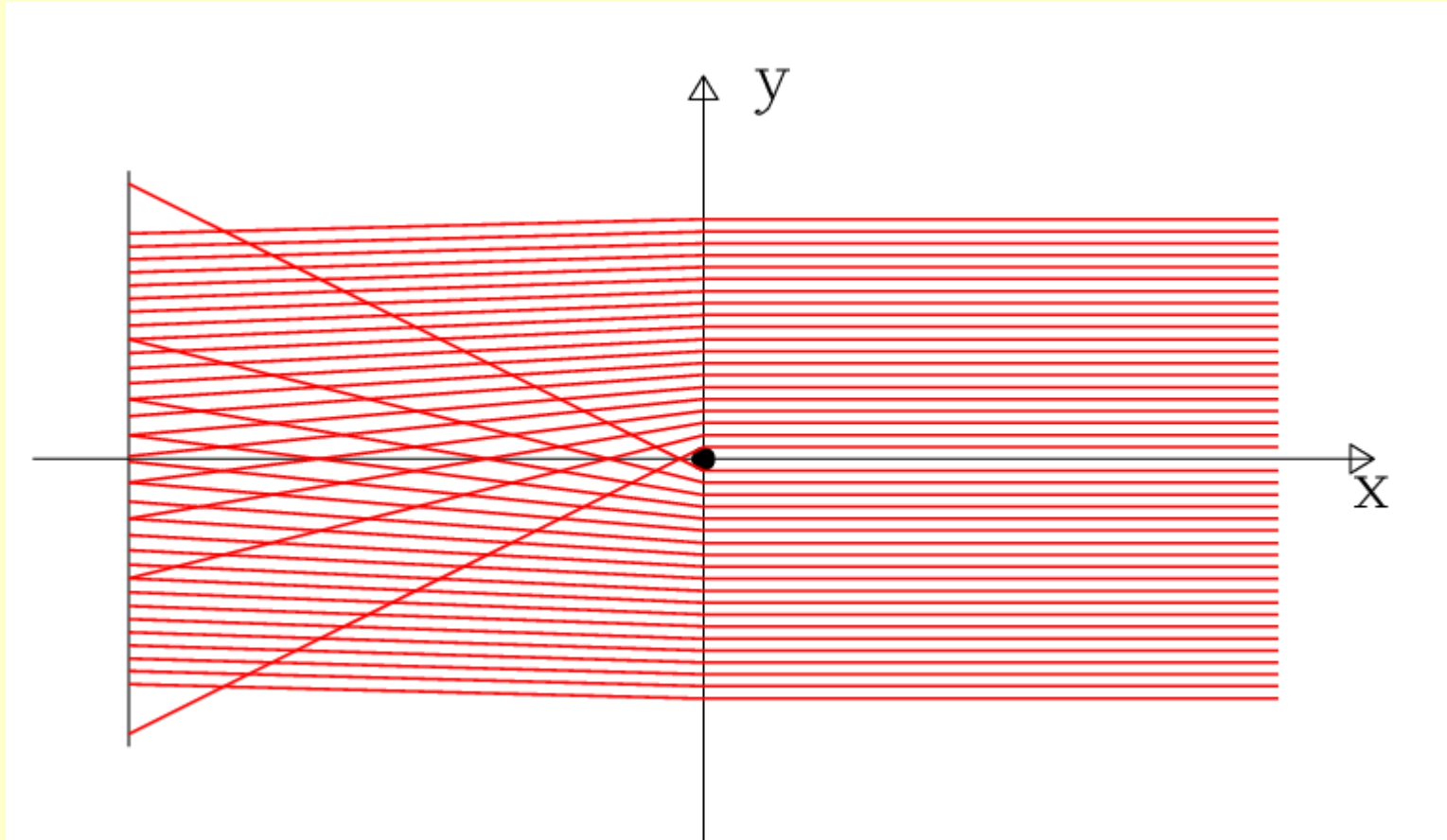
Macierz deformacji A symetryczna $\implies$ (obróć układ) $\implies$ diagonalna

$$\|A_{ij}\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 - \kappa - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa + \gamma \end{array} \right\|$$
$$\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$$

Klasyfikacja obrazów:

- I.(minimum) $\det A > 0$, $\text{tr} A > 0$ (obraz o tej samej orientacji i parzystości)
- II.(punkt siodłowy) $\det A < 0$ (obraz o zmienionej parzystości)
- III.(maksimum) $\det A > 0$ $\text{tr} A < 0$ (obraz o tej samej parzystości, odwrócony)

Wzmocnienie strumienia energii



Po przejściu w pobliżu masy wiązka przestaje być jednorodna.
Oświetleni ekranu staje się zależne od położenia

Wzmocnienie

Statyczny, skoncentrowany rozkład masy nie zmienia energii fotonów docierających z daleka i oddalających się ponownie na dużą odległość

$$I_\nu(\text{soczewka}) = I_\nu(\text{bez})$$

$$F_\nu = \int d\Omega \, I_\nu$$

$$\frac{F_\nu^{(i)}}{F_\nu^{(s)}} = \frac{\int d\Omega^{(i)} I_\nu}{\int d\Omega^{(s)} I_\nu} = \frac{\Delta\Omega^{(i)}}{\Delta\Omega^{(s)}} = \frac{1}{\det||A||} \equiv \mathcal{M}^{(i)}$$

Powyższe jest prawdziwe dla **małych** źródeł, gdy można przyjąć, że wzmocnienie jest stałe w obrębie każdego obrazu. Dla dużych ale **jednorodnych** źródeł, stosunek strumieni dany jest przez stosunek kątów bryłowych. W ogólnym przypadku konieczne może być całkowanie:

$$F_\nu^{(i)} = \int_{image} d\Omega^{(i)} I_\nu = \int_{source} d\Omega^{(s)} \mathcal{M}^{(i)} I_\nu$$

