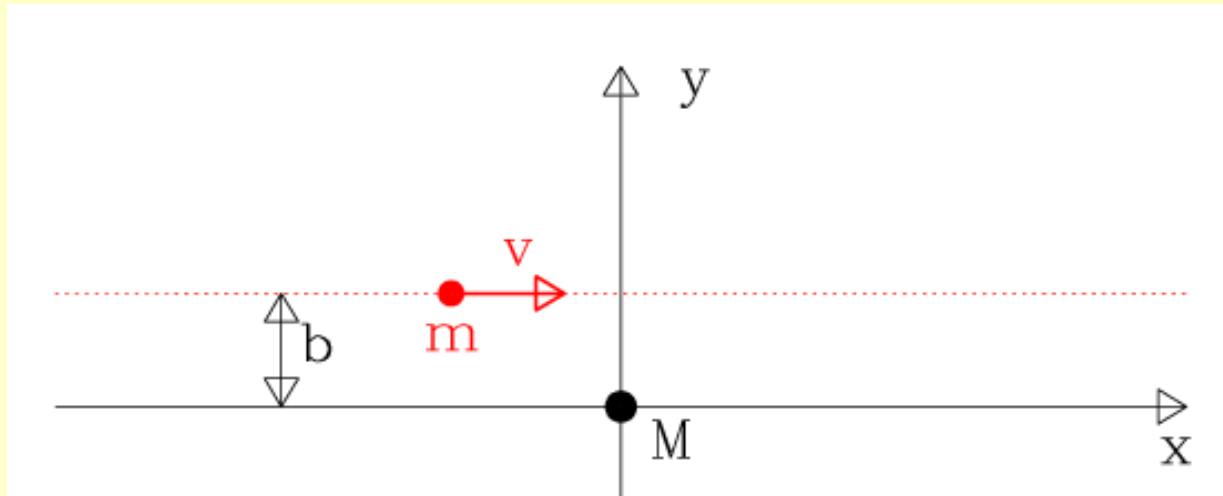


Soczewkowanie grawitacyjne 2

- Przypomnienie
- Propagacja fal
- Czas biegu sygnałów
- Deformacja obrazów
- Wzmocnienie
- Punktowa soczewka

Ugięcie



Soldner (1801):

$$|\alpha| = \frac{2GM}{v^2 b} \rightarrow \frac{2GM}{c^2 b}$$

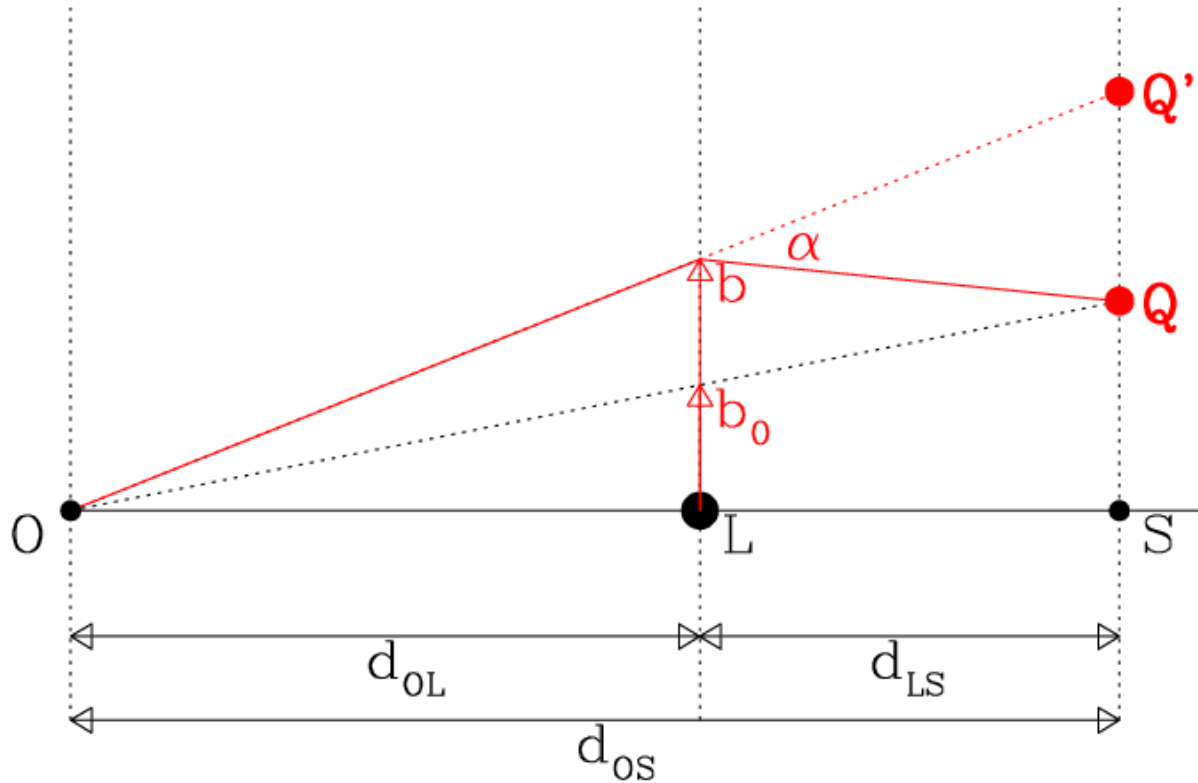
Einstein (1915):

$$\alpha = (1 + v^2/c^2) \frac{2GM}{v^2 b} \rightarrow \frac{4GM}{c^2 b}$$

Ogólny przypadek:

$$\vec{\alpha}(\vec{b}) = \sum_i \frac{4Gm_i(\vec{b}_i - \vec{b})}{c^2 |\vec{b}_i - \vec{b}|^2}$$
$$\rightarrow \int d_2 b' \frac{4G\Sigma_L(\vec{b}')(\vec{b}' - \vec{b})}{c^2 |\vec{b}' - \vec{b}|^2}$$

Równanie *na* obrazy

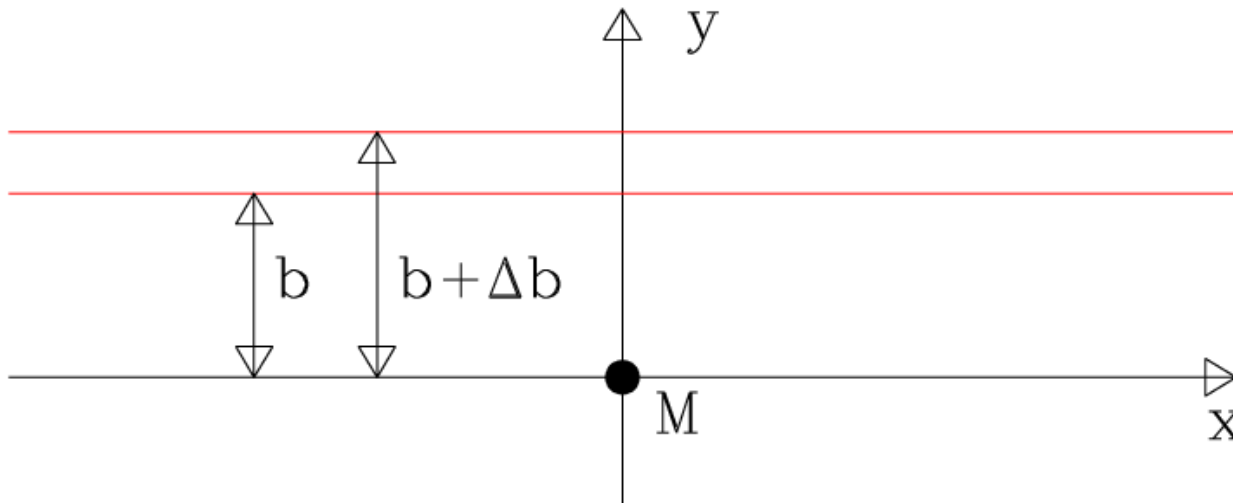


$$\vec{b}_0 = \vec{b} + \frac{d_{OL}d_{LS}}{d_{OS}}\vec{\alpha}$$

$$\vec{b}_0 = \vec{b} + D\vec{\alpha}$$

$$\vec{\beta}_0 = \vec{\beta} + \frac{d_{LS}}{d_{OS}}\vec{\alpha}$$

Opóźnienie sygnałów w polu grawitacyjnym



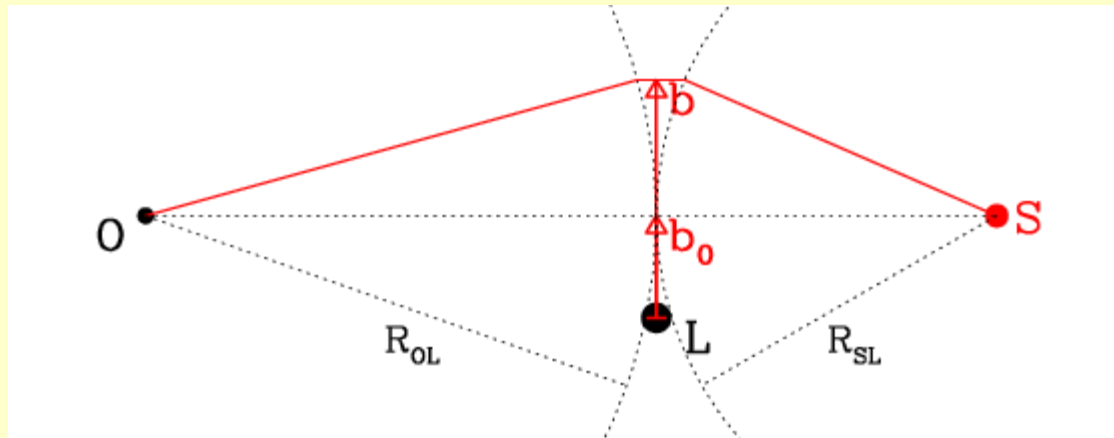
$$c\Delta t_{grav}(\vec{b} + \Delta\vec{b}) - c\Delta t_{grav}(\vec{b}) = \Delta\vec{b} \cdot \vec{\alpha}(\vec{b}) \Leftrightarrow \nabla(c\Delta t_{grav}(\vec{b})) = \vec{\alpha}(\vec{b})$$

$$c\Delta t_{grav}(\vec{b}_2) = c\Delta t_{grav}(\vec{b}_1) + \int_{\vec{b}_1}^{\vec{b}_2} d\vec{b} \cdot \vec{\alpha}(\vec{b})$$

Ogólnie:

$$c\Delta t_{grav}(\vec{b}) = - \sum_i \frac{4Gm_i}{c^2} \ln(|\vec{b}_i - \vec{b}|) \\ \rightarrow - \int d_2b' \frac{4G\Sigma_L(\vec{b}')}{c^2} \ln(|\vec{b}' - \vec{b}|)$$

Zasada Fermata



$$c\Delta t_{geom} = \frac{(\vec{b} - \vec{b}_0)^2}{2R_{OL}} + \frac{(\vec{b} - \vec{b}_0)^2}{2R_{SL}}$$

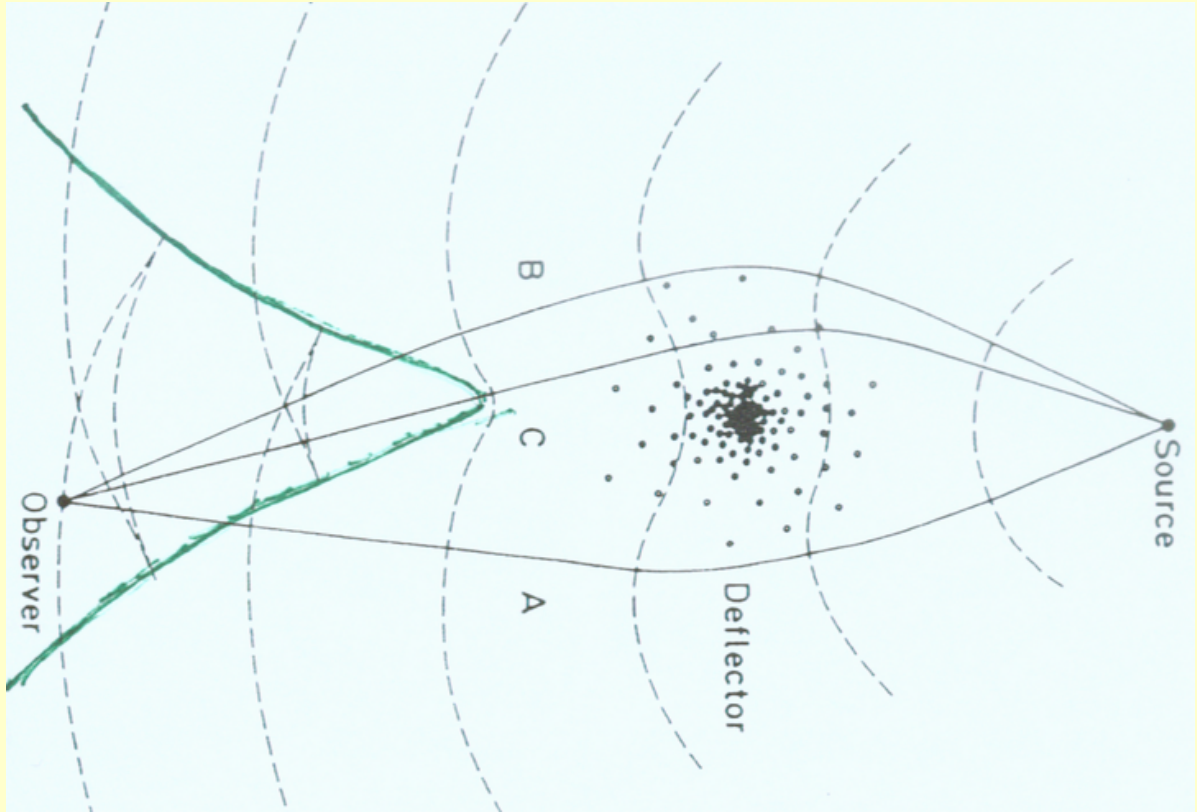
$$c\Delta t = c\Delta t_{geom} + c\Delta t_{grav}$$

Fermat: dla **rzeczywistych** promieni $\nabla(c\Delta t) = 0$

$$\nabla(c\Delta t) = 0 \Leftrightarrow \vec{b}_0 = \vec{b} + \frac{d_{OL}d_{LS}}{d_{OS}} \vec{\alpha}(\vec{b})$$

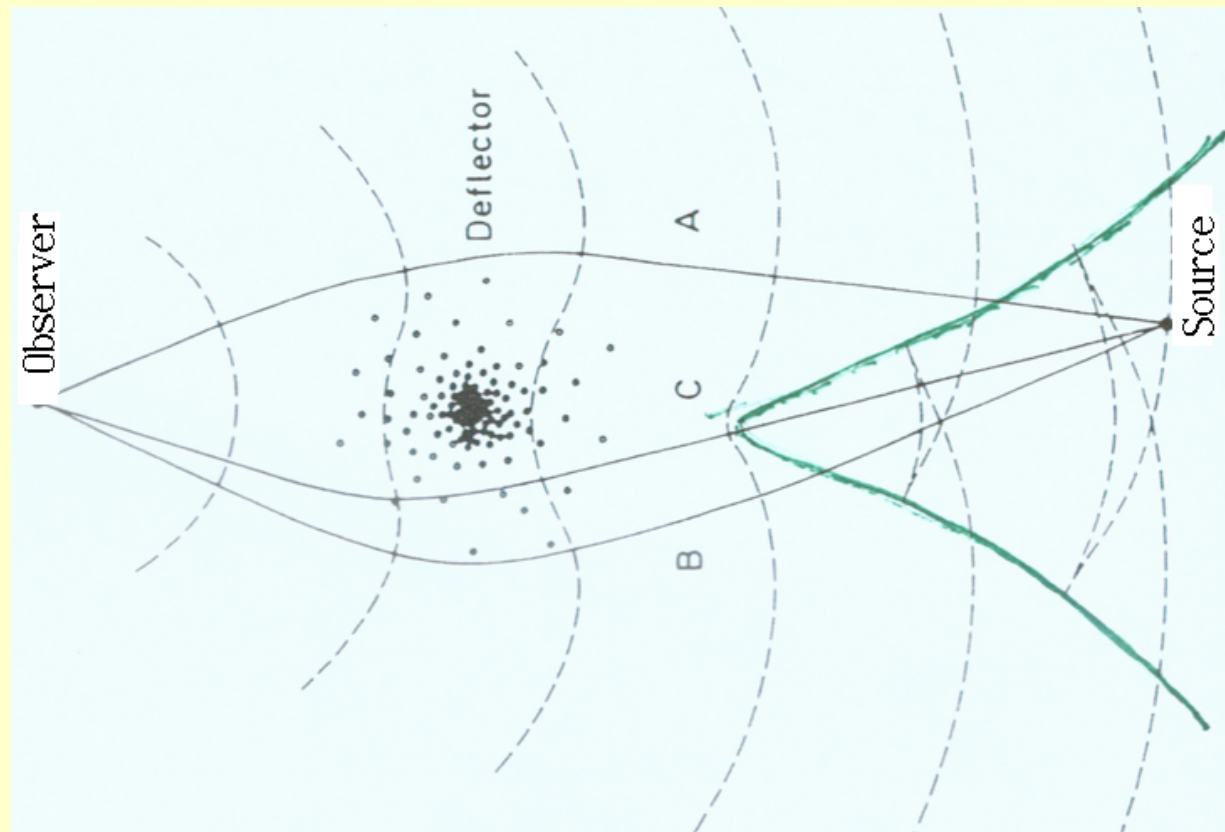
Zasada Fermata jest równoważna równaniu na obrazie
(ogólność tego stwierdzenia udowodnimy później)

Propagacja fal



- Pole grawitacyjne --> opóźnienie --> deformacja
- Promienie zawsze prostopadłe do powierzchni stałej fazy
- Czoło fali z „wkłęśnięciem” --> nietrywialna topologia
- Wewnątrz **powierzchni kaustycznych** do obserwatora docierają kolejno (A,B,C) trzy fragmenty czoła fali z różnych kierunków

Propagacja fal



- **Podjęcie astronomiczne: gdzie znajdowały się rejestrowane obecnie fotony przed czasem t , $2t$, $3t$... Formalnie oznacza to śledzenie promieni świetlnych biegnących wstecz w czasie (“backward ray shooting”)**
- **Źródła wewnątrz powierzchni kaustycznych mają wielokrotne obrazy; przedstawiają one źródło w różnych momentach czasu.**

Funkcja Fermata i liczba obrazów

Różnice czasu propagacji opisuje funkcja Fermata Ψ :

$$\Psi(\vec{b}) = D c \Delta t = \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{b}_0)^2 + D c \Delta t_{grav}(\vec{b})$$

Rzeczywiste promienie mogą przecinać płaszczyznę soczewki w punktach gdzie $\nabla \Psi(\vec{b}) = 0$, czyli w jej minimach, maksimach i punktach siodłowych.

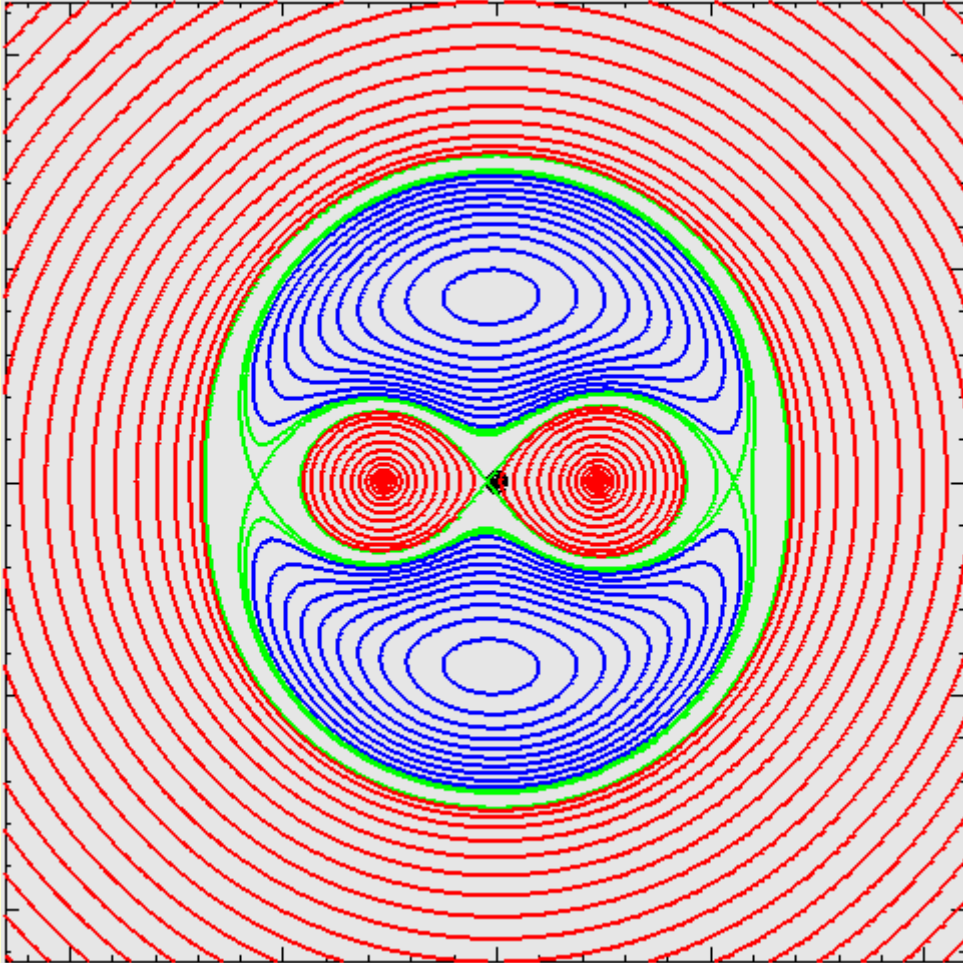
$$|\vec{b}| \rightarrow \infty \Rightarrow \Psi \approx \frac{1}{2} b^2$$

\Rightarrow istnieje co najmniej 1 minimum.

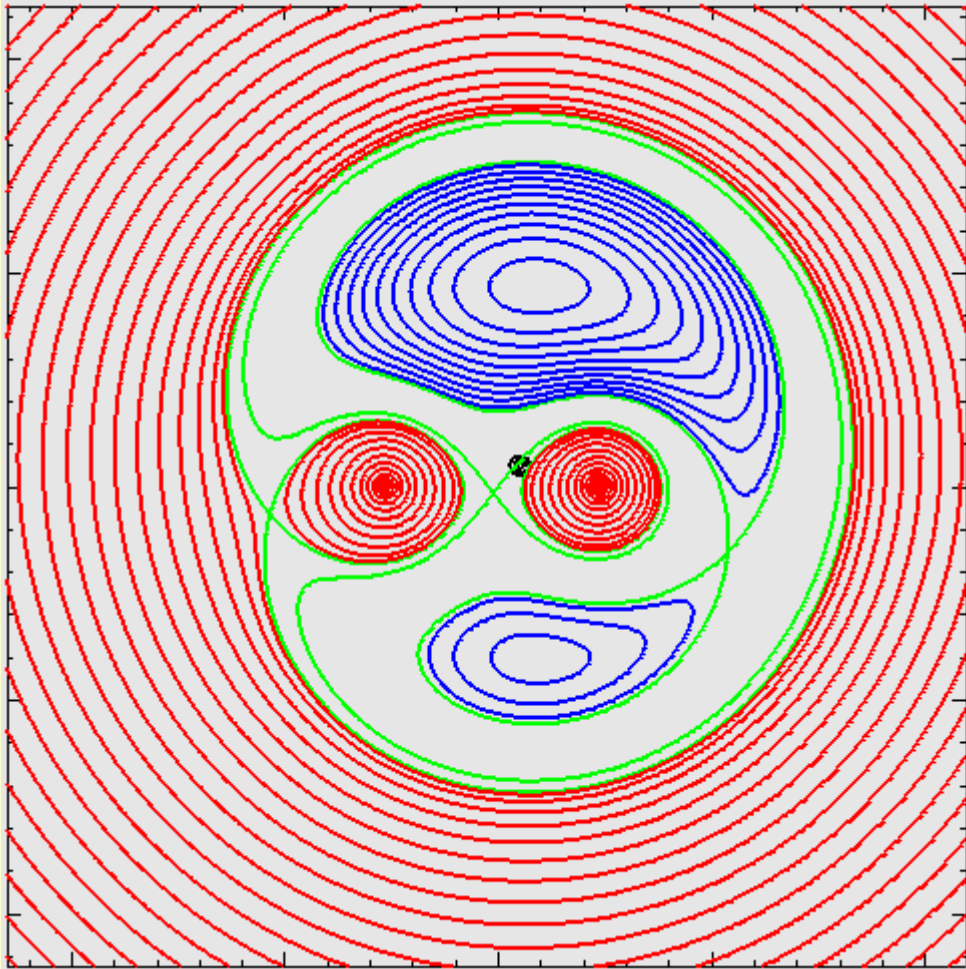
Dla ciągłego i ograniczonego w przestrzeni rozkładu gęstości materii funkcja Fermata jest gładka. Wtedy można pokazać, iż liczba jej ekstremów wynosi:

$$N_{obrazy} = 1 + 2 N_{p.siodlowe}$$

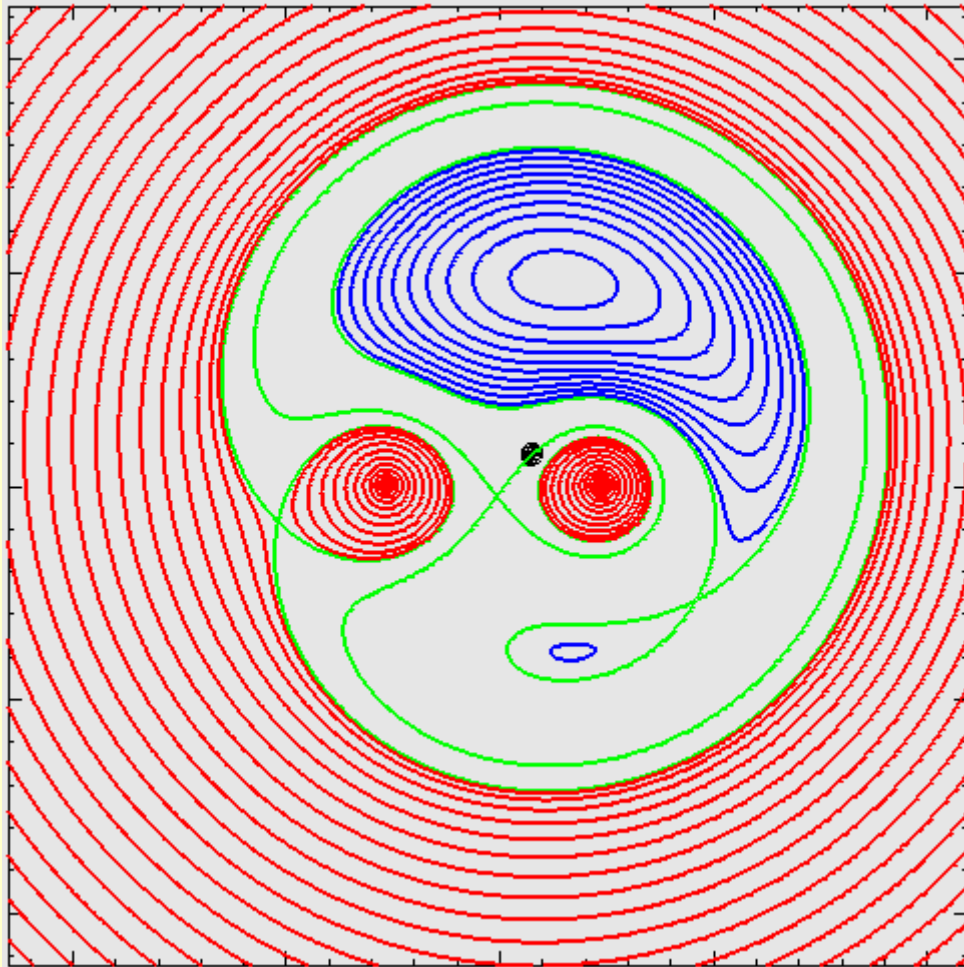
Funkcja Fermata i liczba obrazów



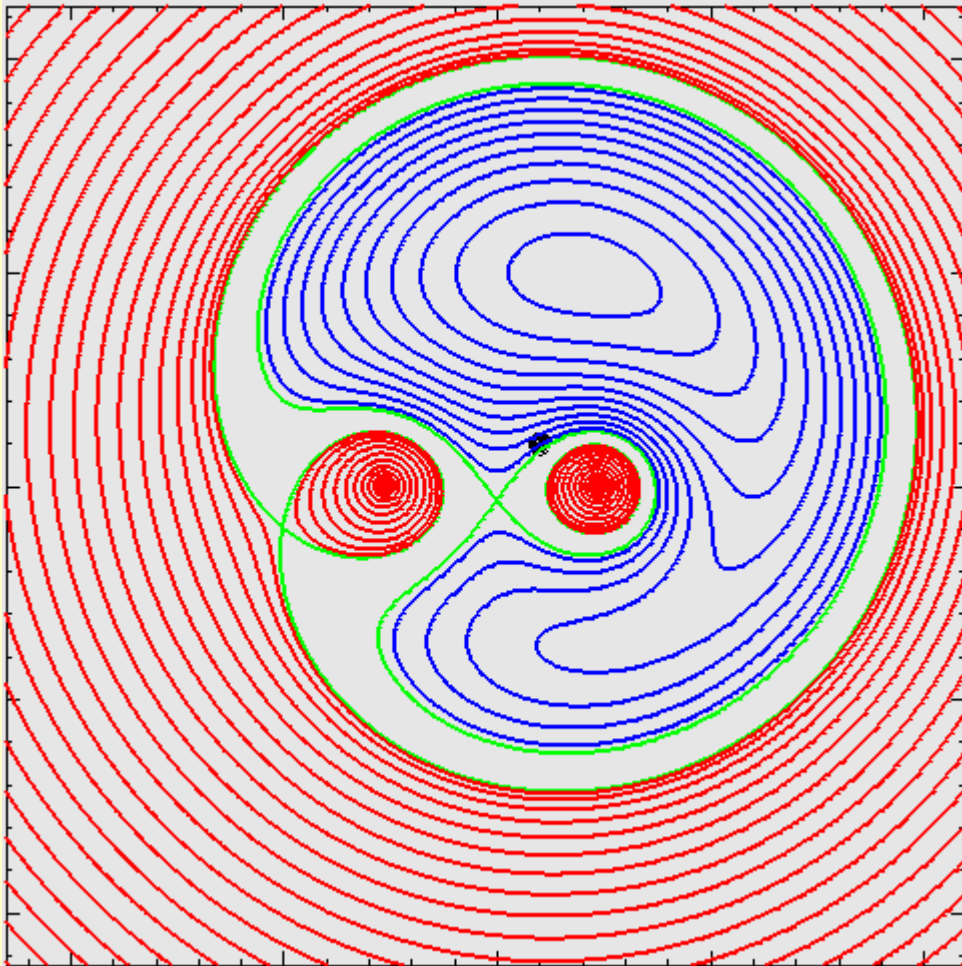
Funkcja Fermata i liczba obrazów



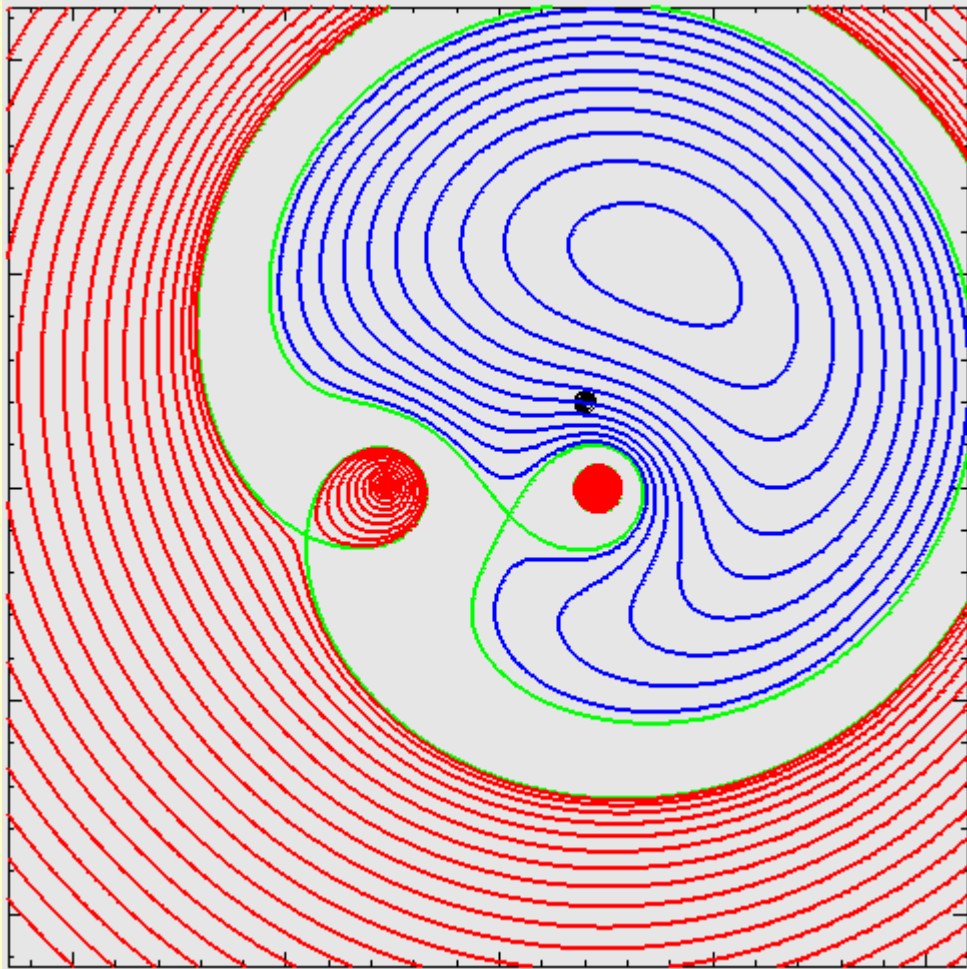
Funkcja Fermata i liczba obrazów



Funkcja Fermata i liczba obrazów



Funkcja Fermata i liczba obrazów



Deformacja obrazów

$$\vec{b}_0 = \vec{b} + D\vec{\alpha}(\vec{b}) = \vec{b} + D \int d_2 b' \frac{4G\Sigma(\vec{b}')}{c^2} \frac{\vec{b}' - \vec{b}}{|\vec{b}' - \vec{b}|^2}$$

$$\vec{b}_0 + d\vec{b}_0 = \vec{b}_0 + \underbrace{\left\| \frac{\partial \vec{b}_0}{\partial \vec{b}} \right\|}_{\|A\|} d\vec{b}$$

$$\|A_{ij}\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{array} \right\| = \Psi_{,ij}$$

Dla $\Sigma = \text{const}$ ogniskowa $f = \frac{c^2}{4\pi G\Sigma}$.

$$\frac{1}{d_{OL}} + \frac{1}{d_{LS}} = \frac{1}{f} \Leftrightarrow D = f \Rightarrow \Sigma_{crit} = \frac{c^2}{4\pi GD}$$

$$\kappa = \frac{\Sigma}{\Sigma_{cr}} \quad \Sigma_{cr} \equiv \frac{c^2}{4\pi GD}$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{\pi} \int d_2 b' \frac{\Sigma(\vec{b}')}{\Sigma_{cr}} \frac{(b_1 - b'_1)^2 - (b_2 - b'_2)^2}{|\vec{b} - \vec{b}'|^4}$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{\pi} \int d_2 b' \frac{\Sigma(\vec{b}')}{\Sigma_{cr}} \frac{2(b_1 - b'_1)(b_2 - b'_2)}{|\vec{b} - \vec{b}'|^4}$$

Deformacja obrazów

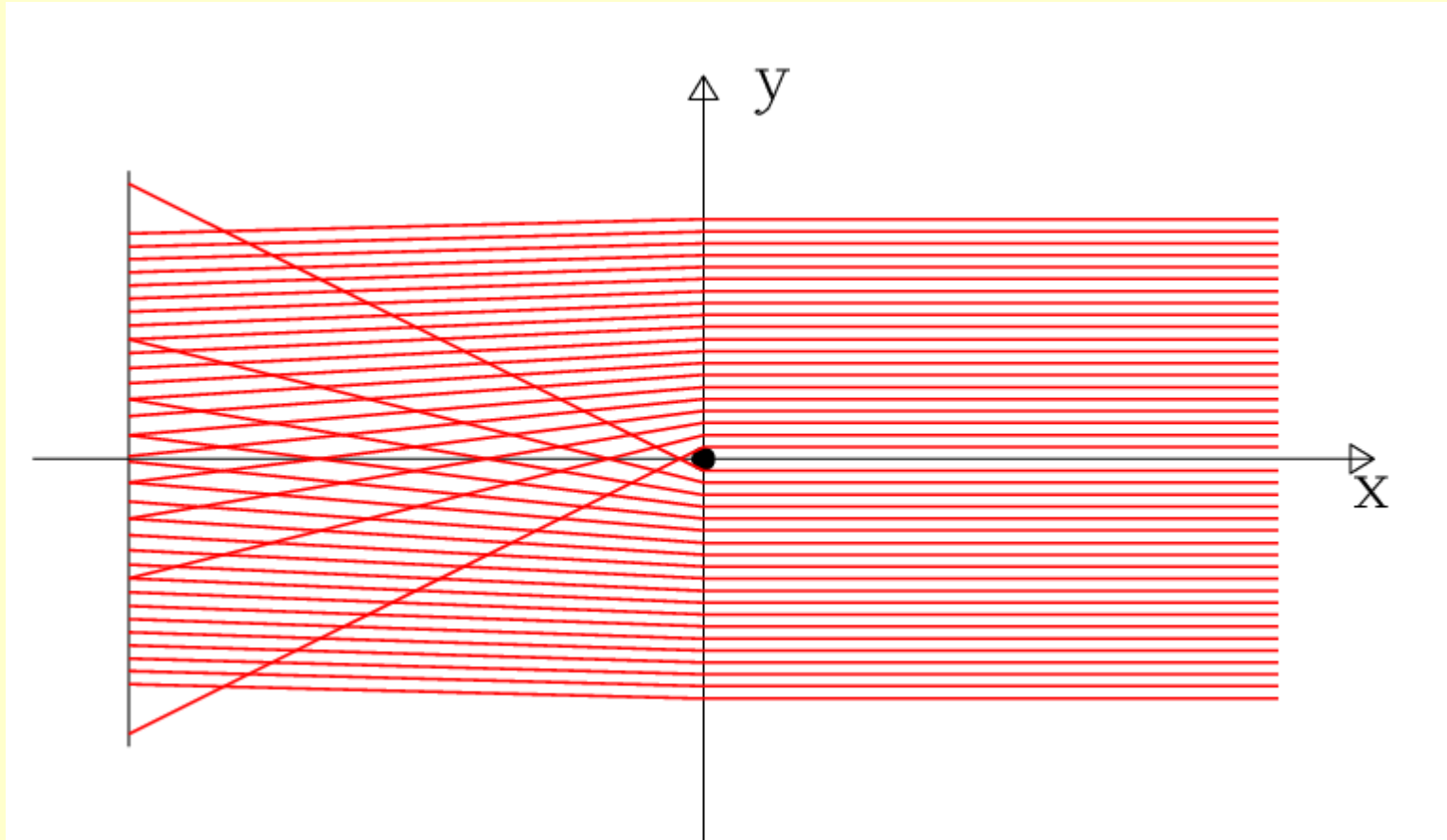
Macierz deformacji A symetryczna \implies (obrót układu) \implies **diagonalna**

$$\|A_{ij}\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 - \kappa - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa + \gamma \end{array} \right\|$$
$$\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$$

Klasyfikacja obrazów:

- I.(minimum) $\det A > 0$, $\text{tr} A > 0$ (obraz o tej samej orientacji i parzystości)
- II.(punkt siodłowy) $\det A < 0$ (obraz o zmienionej parzystości)
- III.(maksimum) $\det A > 0$ $\text{tr} A < 0$ (obraz o tej samej parzystości, odwrócony)

Wzmocnienie strumienia energii



Po przejściu w pobliżu masy wiązka przestaje być jednorodna.
Oświetleni ekranu staje się zależne od położenia

Wzmocnienie

Statyczny, skoncentrowany rozkład masy nie zmienia energii fotonów docierających z daleka i oddalających się ponownie na dużą odległość

$$I_\nu(\text{soczewka}) = I_\nu(\text{bez})$$

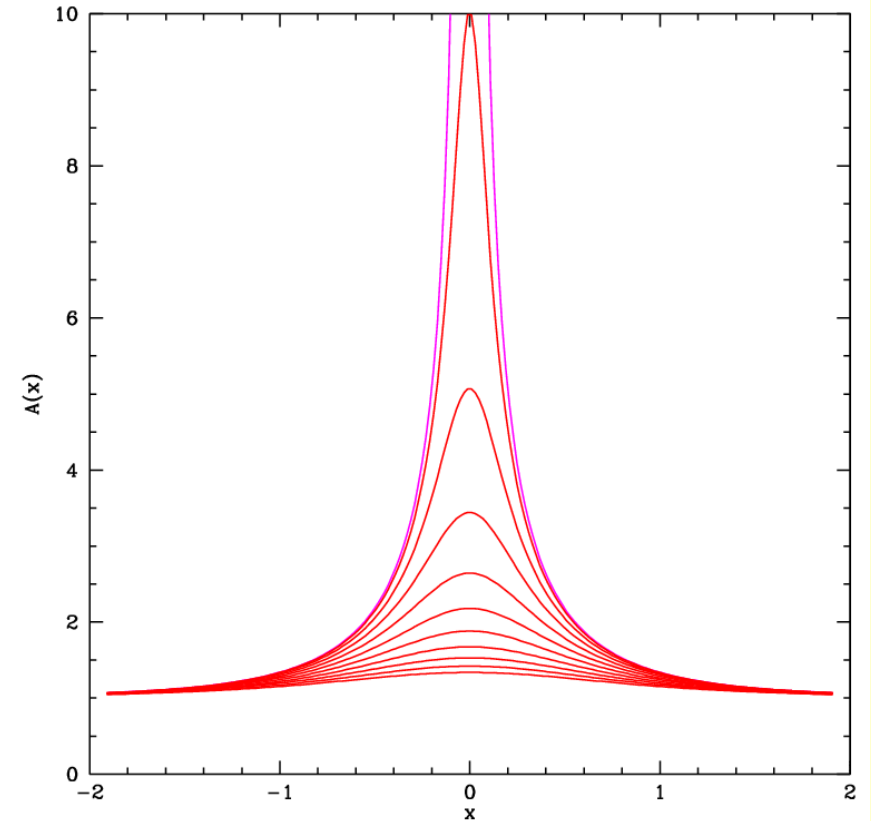
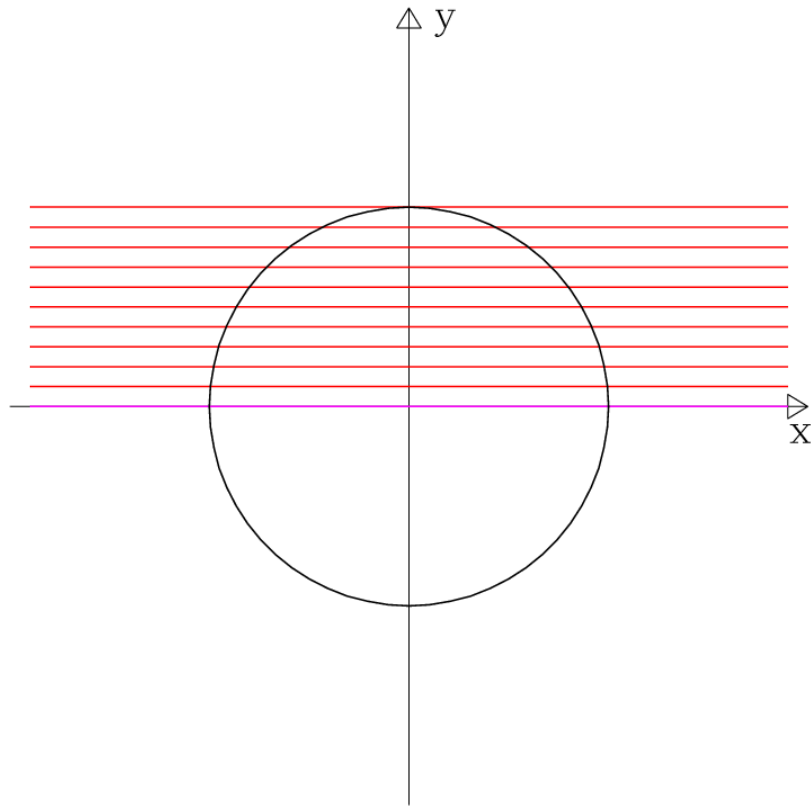
$$F_\nu = \int d\Omega I_\nu$$

$$\frac{F_\nu^{(i)}}{F_\nu^{(s)}} = \frac{\int d\Omega^{(i)} I_\nu}{\int d\Omega^{(s)} I_\nu} = \frac{\Delta\Omega^{(i)}}{\Delta\Omega^{(s)}} = \frac{1}{\det||A||} \equiv \mathcal{M}^{(i)}$$

Powyższe jest prawdziwe dla **małych** źródeł, gdy można przyjąć, że wzmocnienie jest stałe w obrębie każdego obrazu. Dla dużych ale **jednorodnych** źródeł, stosunek strumieni dany jest przez stosunek kątów bryłowych. W ogólnym przypadku konieczne może być całkowanie:

$$F_\nu^{(i)} = \int_{\text{image}} d\Omega^{(i)} I_\nu = \int_{\text{source}} d\Omega^{(s)} \mathcal{M}^{(i)} I_\nu$$

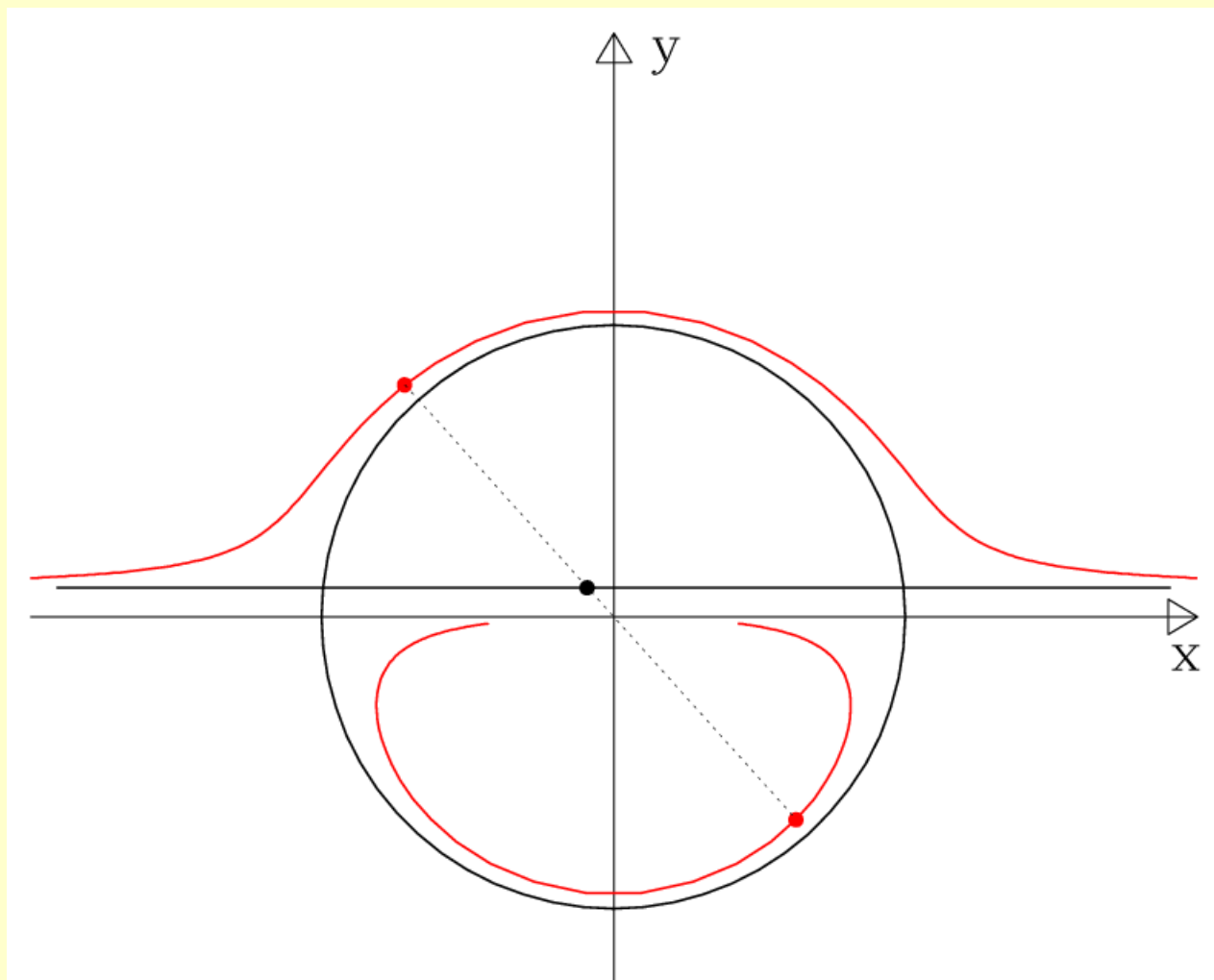
Punktowa soczewka



$$A = A(u) = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}}$$

$$u \equiv \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_E} \quad y = b_0 = \text{const} \Rightarrow A(x) = A(u(x))$$

Punktowa soczewka



$$x = v(t-t_0) \quad y = b_0 = \text{const} \quad t_E \equiv \frac{r_E}{v} \quad u_0 \equiv \frac{b_0}{r_E}$$

$$A(t) = A \left(\sqrt{u_0^2 + \frac{(t-t_0)^2}{t_E^2}} \right)$$