Zadania 01

1. **Rozmiary kątowe galaktyki** Obserwujemy galaktykę o średnicy $D = 20$ kpc. Jaka jest jej średnica kątowa jeśli znajduje się w odległości $r = 10$ Mpc? $r = 100$ Mpc? (Proszę przedstawić wynik w minutach/sekundach łuku.)

2. **Rozmiary kątowe galaktyki** Obserwujemy galaktykę z poprzedniego zadania. Jakie są jej rozmiary kątowe jeśli jej prędkość ucieczki ma wartość $v = 10000$ km/s? $v = 70000$ km/s? Przyjmujemy, iż stała Hubble'a ma wartość $H_0 = 100\,h$ km/s/Mpc./

3. **Zliczenia gwiazd** Przypuśćmy, że 10^{10} gwiazd, każda o jasności absolutnej $M_V = +4.73$, jest równomiernie rozmieszczonych w kuli o promieniu $R = 10$ kpc wokół obserwatora. Ile gwiazd o wielkości obserwowanej $m_V \leq 4.73$ widać na całym niebie? A dla $m_V \leq 9.73$?, $m_V \leq 14.73$?, $m_V \leq 19.73$?, $m_V \leq 24.73$?

4. **Zliczenia galaktyk** Przypuśćmy, że wszystkie galaktyki są identyczne, mają $M = -20^m$ i średnią koncentrację w przestrzeni $n = 0.02/\mathrm{Mpc}^3$. (Rozkład jednorodny.) Ile galaktyk jaśniejszych od granicznej wielkości gwiazdowej, $m \leq m_{lim}$, zaobserwujemy na całym niebie? Jaki jest wynik liczbowy dla $m_{lim} = 15^m$?, $m_{lim} = 20^m$?, $m_{lim} = 25^m$?

5. **Rozkład jasności galaktyk** Przyjmijmy, że rozkład jasności galaktyk ma postać:

$$n(L)dL = n^* \left(\frac{L}{L^*}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) \frac{dL}{L^*}$$

czyli ma formę Schechtera z wybranym wykładnikiem potęgi $\alpha = 1$. Niechaj $n^* = 0.02/\mathrm{Mpc}^3$, $L^* = 10^{10} L_\odot$. A)Jaka jest oczekiwana liczba galaktyk w $1\mathrm{Mpc}^3$? B)Jaka jest oczekiwana wartość mocy promieniowaniia w $1\mathrm{Mpc}^3$?

6. **Zliczenia galaktyk** Rozkład jasności galaktyk ma postać $n(L)$, i jest jednorodny w przestrzeni. Ile obiektów jaśniejszych od strumienia granicznego ($F \geq F_{lim}$) można zaobserwować?

7. **Tło słabych obiektów** Rozkład jasności obiektów ma postać $n(L)$, rozkład przestrzenny jest jednorodny. Jaki jest wkład obiektów słabszych od strumienia granicznego ($F \leq F_{lim}$) do natężenia tła ?

8. **Paradoks Olbersa** Zakladamy, ze zrodla promieniowanie sa rozmieszczone ze stala gestoscia w przestrzeni, i ze sumaryczna moc wypromieniowywana z jednostki objetosci ma wartosc $\mathcal{L}$. Jakie jest natezenie swiatla docierajace do obserwatora? (Tzn jaki strumien promieniowania dociera z jednostkowego kata brylowego?)

Zadania 02

1. **Kształt linii widmowych z dysku** Obserwujemy „cały” dysk o płaskiej krzywej rotacji Prędkość w dysku dana jest przez

$$\vec{V}(\vec{r}) = V_0 \vec{e}_\phi$$

a jego jasność powierzchniowa zależy tylko od promienia ($I(\vec{r}) = I(|\vec{r}|)$)

Jaki jest kształt obserwowanej linii? Jaka jest jej całkowita szerokość? ($\Delta\lambda/\lambda \ll V_0/c$, linia widzenia tworzy z normalną do płaszczyzny dysku kąt i).

2. **Kształt linii widmowych z dysku** Obserwujemy fragment dysku o płaskiej krzywej rotacji, który widoczny jest w szczelinie spektrografu. Prędkość w dysku dana jest przez

$$\vec{V}(\vec{r}) = V_0 \vec{e}_\phi$$

a jego jasność powierzchniowa jest A)stała ($I(\vec{r}) = I_0$ dla $r \leq r_0$) B) dana prawem wykładniczym ($I(\vec{r}) = I_0 \exp(-r/r_0)$).

Jaki jest kształt obserwowanej w szczelinie linii, jeśli jej naturalna szerokość wynikająca z zasady nieoznaczoności oraz związana z ruchami atomów jest zaniedbywalna ($\Delta\lambda/\lambda \ll V_0/c$), a linia widzenia tworzy z normalną do płaszczyzny dysku kąt i?

3. **Mapa prędkości w dysku** Obserwujemy dysk nachylony pod kątem i. Prędkość w dysku ma tylko składową azymutalną. Część centralna rotuje sztywno, a na zewnątrz promienia r_0 krzywa rotacji jest płaska:

$$V_\phi(r) = \begin{cases} V_0 \frac{r}{r_0} & r \leq r_0 \\ V_0 & r > r_0 \end{cases}$$

Jak przebiegają linie stałej prędkości materii w dysku względem obserwatora $V_\parallel$?

4. **Rozkład masy i gęstości ciemnej materii** Przyjmujemy, że rozkład ciemnej materii jest sferycznie symetryczny i że jest ona dominującym źródłem pola grawitacyjnego. Jakie rozkłady masy $M(r)$ ciemnej materii w kuli o promieniu r odpowiadają krzywym rotacji z zadania 1 i 3? Jaki jest rozkład gęstości materii $\rho(r)$ w obu przypadkach?

5. **Rozmiary Galaktyki** W otoczeniu Słońca zdarzają się gwiazdy składowej sferoidalnej o prędkości $v = 500$ km/s. Do jakiego minimalnego promienia r_{min} sięgać musi sferyczne halo ciemnej materii, aby gwiazdy takie były przez Galaktykę grawitacyjnie związane?

Słońce okrąża centrum Galaktyki z prędkością $v_\odot \approx 220$ km/s w odległości $r_\odot \approx 8.5$ kpc. Przyjmujemy, że prędkość rotacji w polu grawitacyjnym Galaktyki jest stała aż do r_{min}, a na zewnątrz gęstość materii znika.

6. **Masa Galaktyki** Jaka jest masa centralnej części Galaktyki, do orbity Słońca? A wewnątrz r_{min} z poprzedniego zadania?

   Wygodna jednostka:

$$1M_{\odot} = \frac{(30\ \mathrm{km/s})^2\ *(1\ \mathrm{AU})}{G}$$

7. **Parametry galaktyki spiralnej.** Obserwujemy galaktykę spiralną o prędkości ucieczki $v_r = 3000$ km/s. Na skutek rzutowania jej dysk ma eliptyczność taką jak galaktyka typu E4 i wielką średnicę o rozmiarach kątowych $\alpha = 0.001$ rad. Całkowita (obserwowana !) szerokość linii neutralnego wodoru wynosi $\Delta v_{obs} = 320$ km/s. Przyjmijmy, że relacja Tully'ego i Fishera ma postać $L = 10^{10}\, h^{-2}\, L_{\odot}\ (\Delta v/400\ km/s)^4$, gdzie Δv jest wielkością „mierzoną" w płaszczyźnie dysku.

   Jaka jest masa i moc promieniowania galaktyki wynikająca z relacji T-F ? Jaki jest stosunek M/L dla rozpatrywanej galaktyki ? (Chodzi o wielkości dotyczace obserwowanej części obiektu).

   - $H_0 = 100\ h\ km/s/Mpc$
   - Dla stałej grawitacji G: $\frac{1}{G} = 2.25 \times 10^5 M_{\odot}(km/s)^{-2}(kpc)^{-1}$

Zadania 03

1. **Profil rentgenowski** Jaka jest zależność powierzchniowej jasności rentgenowskiej od promienia w 2D ($I_X(R)$), jeśli promieniujący obłok jest sferycznie symetryczny, cienki optycznie i wysyła promieniowanie hamowania? Gęstość gazu w 3D dana jest zależnością potęgową, $\rho(r) \propto r^{-\gamma}$ temperatura jest stała ($T(r) = T_0$), a tempo emisji z jednostki objętości dane jest zależnością $j_X \propto \rho^2 T^{1/2}$?

2. **Parametry galaktyki eliptycznej.** Obserwujemy galaktykę E0 o prędkości ucieczki $v_r = 3500$ km/s. Jej średnica kątowa to $\alpha = 0.001$ rad. Galaktyka otoczona jest rzadkim, promieniującym rentgenowsko gazem o (stałej) temperaturze $T_g = 10^7\ K$. Profil natężenia promieniowania X pozwala wyznaczyć rozkład gęstości gazu w funkcji odległości od środka galaktyki:

$$\rho_g \sim r^{-\gamma} \qquad \gamma = 2 \tag{1}$$

   Jaka masa zawarta jest w kuli odpowiadającej widomym rozmiarom galaktyki, jeśli gorący gaz utrzymywany jest w równowadze hydrostatycznej przez jej pole grawitacyjne? Jakie są liniowe rozmiary galaktyki? (Przyjmujemy następujące wartości stałych: $H_0 = 70 km/s/Mpc$, stała Boltzmanna: $k = 1.38 \times 10^{-16}\ erg/K$, masa atomu wodoru: $m_H = 1{,}66 \times 10^{-24}\ g$, średnia masa cząsteczkowa $\mu = 0.625$.)

3. **Pary galaktyk** Przyjmijmy, że w podwójnym układzie galaktyk obiekty obiegają środek masy po orbitach kołowych, oraz że płaszczyzna orbity jest losowo zorientowana, a faza ruchu (położenie na orbicie) - losowe. Jaki jest związek pomiędzy odległością i różnicą prędkości w 3D i 2D? Jaki jest średni rezultat rzutowania:

$$\left\langle r_{12} \Delta v^2 \right\rangle_{\mathrm{rzut}} = ?$$

4. **Definicja Abella** Warunek zwartości mówi, że promień kątowy gromady powinien być nie większy niż $1.72/z$ arcmin. Jakiemu liniowemu rozmiarowi to odpowiada? Jaka jest oczekiwana moc promieniowania z losowo wybranego kulistego obszaru o tym promieniu? Funkcja świecenia ma postać:

$$n(L)dL = n^* \left(\frac{L}{L^*}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) \frac{dL}{L^*}$$

   czyli ma formę Schechtera z wybranym wykładnikiem potęgi $\alpha = 1$, $n^* = 0.02/\mathrm{Mpc}^3$, $L^* = 10^{10} L_\odot$. Ile razy koncentracja galaktyk w tym obszarze musi przekroczyć średnią, by całkowita jasność gromady osiągnęła $L_{gromada} = 100\, L^*$?

5. **Masa gazu w gromadzie.** Przyjmujemy następujący uproszczony model gromady galaktyk:

   - gromada jest sferycznie symetryczna
   - Zakładamy, że profil gęstości gazu odpowiada rozkładowi NFW:

     $$\rho_g = \frac{4\rho_s}{(r/R_s)(1+r/R_s)^2}$$

     (to mało realistyczne założenie daje łatwość rachunkową)
   - gaz jest optycznie cienki, ma stała temperaturę T i jest źródłem promieniowania hamowania
   - jednostka objętości jest źródłem promieniowania o mocy: $j_X = C_n(T)\ n^2 = C_\rho(T)\ \rho_g^2$
   - całkowity strumień rentgenowski jest znany i ma wartość F_X
   - prędkość ucieczki gromady ma wartość V_r
   - rozmiary kątowe gromady (promień) odpowiadające zmianie nachylenie profilu natężenia promieniowania X to α_s

   Jaka jest całkowita masa gazu wewnątrz promienia $R_{vir} = cR_s$, gdzie $c = 7$ (ta wartość stałej jest typowa dla gromad)? Jak zależy od stałej Hubble'a $H_0 = 100\ h\ km/s/Mpc$?

Zadania 04

1. **Nierelatywistyczna fala uderzeniowa** Ruch gazu jest jednowymiarowy, z prędkością Av przed i v po przejściu przez powierzchnię nieciągłości („falę uderzeniową") prostopadłą do kierunku ruchu. Strumień masy jest zachowany więc gęstość gazu można oznaczyć ρ/A przed i ρ po przejściu fali; wielkość $\dot{m} = \rho v$ jest więc zachowana. Innymi zachowanymi wielkościami są strumień pędu ($\rho v * v + P$) oraz strumień energii $((\frac{1}{2}\rho v^2 + \varepsilon + P)v$. (Gdzie P to ciśnienie, ε to gęstyość energii wewnętrznej, a $\varepsilon + P$ to gęstość entalpii. Mozna przyjąć, że $\varepsilon = \frac{3}{2}nkt = \frac{3}{2}P$ oraz zaniedbać energię i ciśnienie przed falą.

   Jaka wartość stosunku prędkości A wynika z praw zachowania? Jaka część energii kinetycznej strumienia zamieni się na energię wewnętrzną?

2. **Nadświetlne prędkości** Ciało A spoczywa względem obserwatora O, natomiast ciało B oddala się od A z prędkością V po prostej. Kierunek tej prędkości tworzy z linią widzenia kąt Θ (tzn $\angle OAB = \Theta$). Jaka jest obserwowana, prostopadła do linii widzenia prędkość oddalania się B od A? ($|\vec{AB}| \ll |\vec{OA}|$).

3. **Kierunek emisji przez relatywistyczne źródło** Źródło o czynniku Lorentza γ emituje promieniowanie izotropowo we własnym układzie odniesienia. Jaka jest rozwartość stożka wokół trajektorii źródła, w którym znajdzie się połowa wyemitowanych fotonów w układzie spoczywającym?

4. **Wypadkowe widmo synchrotronowe** Pojedynczy elektron o czynniku Lorentza γ, poruszający się w jednorodnym polu magnetycznym o natężeniu B wypromieniowuje energię z mocą:

   $$L_{1el} = 2\gamma^2\, \sigma_{el}\, c\, \left(\frac{B^2}{8\pi}\right)$$

   Widmo energetyczne elektronów ma postać:

   $$n(\gamma)d\gamma = n_0\, \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{-p}\, \frac{d\gamma}{\gamma_0}$$

   gdzie n_0, γ_0 są stałymi. Jaka jest moc promieniowania synchrotronowego w częstości ν z jednostki objętości $\mathcal{L}_\nu$? (Przyjmujemy, że elektron o czynniku γ promieniuje w częstości $\nu_c \approx \gamma^2\, \nu_{cycl}$). A jaka jest całkowita moc w zakresie częstości od $(1 * \gamma_0)^2 * \nu_{cycl}$ do $(2 * \gamma_0)^2 * \nu_{cycl}$?

5. **Przyspieszanie cząstek I** Relatywistyczna cząstka odbija się od sztywnej ściany poruszającej się „na jej spotkanie" z prędkością V. O jaki czynnik wzrośnie energia cząstki po takim odbiciu?

6. **Przyspieszanie cząstek II** A jak wygląda sytuacja, jeśli ściana porusza się pod kątem Θ w stosunku do trajektorii cząstki? ($\Theta = 0$ oznacza ruch „naprzeciw" cząstce, $\Theta = \pi$ $(= 180°)$ - „ucieczkę" ściany przed cząstką wzdłuż jej trajektorii.)

7. **Asymetria strug** Wyobraźmy sobie, że w dwóch przeciwnych kierunkach poruszają się strugi optycznie grubej materii o tej samej (mierzonej we współporuszających się układach odniesienia) temperaturze T_0. Wartość obu prędkości wynosi V, a trajektorie ruchu strug tworzą z linią widzenia kąt Θ. Jakie są obserwowane temperatury strug? Jaki jest stosunek bolometrycznych jasności powierzchniowych?

8. **Asymetria strug monochromatycznie** Strugi z poprzedniego zadania są (teraz) źródłami promieniowanie synchrotronowego o widmie potęgowym. Natężenie zmierzone przez obserwatora poruszającego się równolegle i z tą samą prędkością co materia w strudze wynosi

   $$I(\nu) = I_0 \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{-\alpha}$$

   Jaki jest stosunek jasności powierzchniowych (natężeń promieniowania) w częstości ν_{obs}? (Zakładamy, że potęgowe widmo obowiązuje w dostatecznie dużym zakresie częstości).

   Wskazówka Jeśli te same fotony wysyłane przez źródło są obserwowane w częstości ν_1 przez jednego i ν_2 przez drugiego obserwatora, to mierzone przez nich natężenia spełniają warunek:

   $$\frac{I(\nu_1)}{\nu_1^3} = \frac{I(\nu_2)}{\nu_2^3}$$

Zadania 05

1. **Dominacja Ly-α w serii Lymana** O ile w serii Balmera widma Sy i QSO zawieraja kilka linii, to w serii Lymana obserwuje się tylko linię Ly-α. Proszę wytłumaczyć to zjawisko, zakładając że ośrodek powstawania linii jest nieprzezroczysty dla linii serii Lymana i przezroczysty dla pozostałych serii. (Promieniowanie zewnętrzne przede wszystkim jonizuje. Atomy znajdują się przede wszystkim w stanie podstawowym. Przypuśćmy, że $A_{32}/A_{31} = 1/3$, $\tau_{Balmer} \approx 0$, $\tau_{Lyman} = 10$)

2. **Masa w obszarze szerokich linii** Zmiany linii $H\alpha$ są opóźnione w stosunku do kontinuum o $\Delta t = 58^d$. Szerokość tej linii to $\Delta v = 3000$ km/s. Proszę ocenić masę zawartą w obszarze, w którym linie są emitowane, traktując szerokość linii jako rezultat względnych ruchów obłoków emitujących.

3. **Moc promieniowania jądra** Przyjmujemy, że ziarno pyłu w tzw pyłowym torusie otaczającym aktywne jądro pochłania całe padające nań promieniowanie opt-UV i emituje je jak ciało doskonale czarne w NIR. Ziarna blisko wewnętrznego brzegu torusa mają temperaturę sublimacji $T_{sub} = 1700\ K$. Jaka jest moc promieniowania jądra w dziedzinie opt-UV, jesli zmiany w NIR są opóźnione w stosunku do promieniowania oświetlającego o $\Delta t = 100\ d$, a przesunięcie ku czerwieni jest niewielkie ($z \ll 1$) ?

4. **Uproszczony model szerokich linii absorpcyjnych** Zakładamy, że linie powstają w sferycznie symetrycznym wietrze rozpędzanym ciśnieniem promieniowania. Żeby uprościć to do granic założymy jeszcze, że współczynnik pochłaniania wiatru nie zmienia się w dużym zakresie promieni. (Pochłanianie opiera się zwykle na jakichś częściowo zjonizowanych atomach i w rzeczywistości ich frakcja w gazie zmienia się z odległością.) Niechaj M oznacza masę aktywnego jądra, m - masę gazu przypadającą na jeden dominujący w pochłanianiu jon, σ - przekrój czynny tego jonu. Równanie ruchu dla gazu ma postać:
$$m\frac{dv}{dt} = \sigma\frac{L}{4\pi r^2 c} - \frac{GMm}{r^2} = \frac{Cm}{r^2}$$
gdzie pierwszy składnik oznacza siłę wywieraną na powierzchnię σ przez ciśnienie promieniowania, a drugi - siłę grawitacji. L oznacza moc aktywnego jądra emitowaną w postaci fotonów podlegających absorpcji przez dominujący jon. (Ściślej: σ to uśredniony po składzie chemicznym i widmie przekrój czynny). Uproszczenie polega na przyjęciu, iż $C = \text{const}$. Dla powstania wiatru konieczne jest też $C > 0$ Jeśli wiatr jest stacjonarny, to strumień niesionej przezeń masy nie zależy od promienia: $\dot{M} = 4\pi r^2\rho(r)v(r) = \text{const}$. Jaki będzie kształt linii absorpcyjnych, tzn. jak grubość optyczna zależy od prędkości, $d\tau/dv = ?$ ($d\tau = \kappa\rho dr$)

5. **Kształt linii od ekspandującej sferycznej warstwy** Obłoki pochłaniające promieniowanie jonizujące jądra i następnie emitujące je w liniach tworzą cienką sferyczną warstwę ekspandującą z prędkością V. Zakładamy, że rozkład obłoków jest sferycznie symetryczny. Jaki byłby kształt emitowanej przez te obłoki linii ?

6. **Kształt linii od spadających z ∞ obłoków** Na jądro opada gaz z bardzo dużej odległości i możemy przyjąć, że jest to spadek swobodny z prędkością $V(r) = -\sqrt{2GM/R}$.

7. **Kształt linii emisyjnych układu źródeł** Przyjmijmy, iż źródła promieniowania w linii emisyjnej to obłoki gazu opadające z prędkością swobodnego spadku w kierunku obiektu centralnego. Zakładamy, że sumaryczny strumień masy opadających obłoków jest stacjonarny, czyli

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(r) v(r) = \mathrm{const}$$

Przyjmujemy, że element masy obłoków $dm = \rho(r) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ wytwarza promieniowanie w linii o mocy dL_{linia}:

$$dL_{linia} = C \frac{L}{4\pi r^2} dm \qquad r \geq r_{min}$$

gdzie C - stała, L - stacjonarna moc promieniowania jonizującego obiektu centralnego. Wewnątrz r_{min} gaz jest już całkowicie zjonizowany i linie nie powstają. Elementy gazu poruszają się względem obserwatora z prędkościami danymi przez:

$$v_{\parallel} = v(r) \cos\theta$$

gdzie $\theta = 0$ odpowiada kierunkowi "na obserwatora". Jaki jest kształt linii emisyjnej?

8. **Promieniowanie gamma blazarów** Jaki powinien być czynnik Lorentza γ elektronu, aby możliwe było rozproszenie fotonu optycznego w zakres gamma? (Przyjmijmy, że chodzi o wzrost energii o czynnik 10^6, a pędy elektronu i fotonu są przeciwnie skierowane.) **Wskazówka:** wygodnie jest znaleźć układ odniesienia, w którym całkowity pęd cząstek znika.

Zadania 06

1. **Sferyczna akrecja** Przyjmijmy, że sferyczna akrecja materii zachodzi z prędkością swobodnego spadku i ze stałym tempem przepływu. Jaka jest grubość optyczna ze względu na rozpraszanie na swobodnych elektronach od $= r_{min} = 2GM/c^2$ do $r = \infty$ dla krytycznego tempa akrecji:

$$\dot{M}_{Edd} = \frac{L_{Edd}}{\varepsilon c^2} = \frac{4\pi GMcm_p}{\sigma_T\ \varepsilon c^2}$$

Przyjmujemy, że materia to całkowicie zjonizowany wodór. Grubość optyczna to:

$$\tau(r) = \int_r^\infty \frac{\sigma_T}{m_p}\rho(r)dr$$

Tempo akrecji wyraża się przez parametry materii jako:

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(r) v(r)$$

2. **Grubość optyczna dysku** Przyjmujemy, że radialna prędkość materii w dysku jest proporcjonalna do prędkości Keplerowskiej

$$v_r(r) = \beta v_\phi(r) = \beta\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

gdzie współczynnik liczbowy β jest mały (≈ 0.01). Jaka jest grubość optyczna dysku ze względu na rozpraszanie na swobodnych elektronach dla krytycznego tempa akrecji? Grubość optyczna mierzona prostopadle do płaszczyzny dysku jest związana z powierzchniową gęstością masy:

$$\tau(r) = \frac{\sigma_T}{m_p}\ \Sigma(r)$$

a tempo akrecji dane jest przez:

$$\dot{M} = 2\pi r \Sigma(r) v_r(r)$$

3. **Promień pływowy czarnej dziury** W jakiej odległości od czarnej dziury o masie M gwiazda typu Słońca (o masie $1\ M_\odot$ i promieniu $1\ R_\odot$) będzie rozerwana przez siły przypływowe? Jaka jest wartość liczbowa tego promienia dla $M = 10^6, 10^7, 10^8, 10^9\ M_\odot$? Jaki jest jego stosunek do charakterystycznych rozmiarów $GM/c^2 = 1.5\ km\ (M/M_\odot)$?

4. **Szansa na rozerwanie gwiazdy** Rozważamy gwiazdy o izotropowym rozkładzie prędkości w odległości $r \gg r_t$ od czarnej dziury o promieniu pływowym r_t. Gwiazda, która zawędrowałaby do obszaru rozrywania ($r \sim r_t$) poruszałaby się praktycznie po orbicie parabolicznej aż do rozerwania. Jaki jest maksymalny moment pędu na jednostkę masy gwiazd, które docierają do $r \leq r_t$? Jaka część gwiazd o prędkości v w dużej odległości od obszaru rozrywania ma szansę do niego trafić?

5. **Część masy sferoidy, która może spaść** Przyjmujemy, iż na zewnątrz promienia r_{min}, aż do r_{max} rozkład materii odpowiada sferycznemu halo dla płaskiej krzywej rotacji o prędkości v. Rozkład prędkości gwiazd w halo jest lokalnie sferycznie symetryczny, a typowa wartość prędkości to v. Jaka część masy gwiazd może zostać rozerwana?

6. **Odległość do M106** Linie maserowe są na tyle wąskie, a pomiar częstości w dziedzinie radiowej na tyle dokładny, że dla centralnych źródeł w M106 można zmierzyć nie tylko częstość, ale też jego pochodną po czasie. Można to interpretować jako pomiar przyspieszenia źródła wzdłuż linii widzenia:

$$\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dV}{dt} = \frac{a_{\|}^{obs}}{c}$$

   Równie dokładne pomiary astrometryczne pozwalają śledzić zmiany położenia centralnych źródeł na niebie, $\dot{\Theta}^{obs}$. Jesli przyjąć, że M106 znajduje się w (nieznanej) odległości D, a masa czarnej dziury w centrum ma (nieznaną) wartość M, to dla centralnych źródeł na orbicie kołowej o promieniu r_c mielibyśmy:

$$\frac{GM}{r_c} = \left(D\dot{\Theta}^{obs}\right)^2$$

   Jednocześnie składowa przyspieszenia wzdłuż linii widzenia (mierzona na podstawie zmiany częstości) to przyspieszenie dośrodkowe:

$$\frac{GM}{r_c^2} = a_{\|}^{obs}$$

   Zupełnie niezależnie można zmierzyć prędkość ruchu któregoś ze źródeł poruszających się wzdłuż linii widzenia V^{obs} i jego kątową odlegołość od centrum α^{obs}. To źródło też porusza się po orbicie kołowej, w tym przypadku o promieniu $D\alpha^{obs}$, więc:

$$\frac{GM}{D\alpha^{obs}} = (V^{obs})^2$$

   Jak wyrażają się odległość D i masa M przez wielkości obserwowane?

Zadania 07

1. **Tempo wzrostu czarnej dziury** Zakładamy, że tempo akrecji odpowiada jasności Eddingtona,
$$\dot{M}_{Edd} = \frac{L_{Edd}}{\varepsilon c^2} = \frac{4\pi G M c m_p}{\sigma_T\ \varepsilon c^2}$$
a wydajność akrecji ε i moment pędu a czarnej dziury nie zmieniają się. Jak zależy od czasu masa czarnej dziury? Jaki jest charakterystyczny czas wzrostu masy?

2. **Wzrost masy i momentu pędu czarnej dziury** Bardziej realistyczny opis akrecji poprzez dysk na czarną dziurę musi uwzględniać zmiany jej momentu pędu i związane z tym zmiany energii wiązania i momentu pędu na marginalnie stabilnej orbicie. Jaki układ równań opisuje zmiany masy M i parametru Kerra a? Bezwymiarowy parametr a określający moment pędu czarnej dziury to
$$a = \frac{J_{BH}}{GM_{BH}^2/c}$$
a wydajność zamiany masy spoczynkowej na energie promieniowania to $\varepsilon = 1 - e_{ms}(a)$. ($e_{ms}$ - minimalna energia cząstki na orbicie kołowej na jednostkę jej energii spoczynkowej). Minimalny moment pędu na jednostke masy cząstki na orbicie kołowej to $GM/c * j_{ms}(a)$. (e_{ms} j_{ms} to bezwymiarowe funkcje a).

3. **Potencjał Paczyńskiego i Witty** Pseudonewtonowski potencjał PW ma postać:
$$\phi_{PW}(r) = -\frac{GM}{r - r_S} \qquad r_S \equiv \frac{2GM}{c^2}$$
gdzie r_S jest promieniem grawitacyjnym Schwarzschilda. Proszę obliczyć prędkość kątową $\Omega(r)$, prędkość orbitalną $v(r)$ moment pędu na jednostkę masy $l(r)$ oraz energię na jednostkę masy $e(r)$ dla cząstki próbnej na orbicie kołowej. Używając tych wyników proszę znaleźć promienie, dla których: $e(r)$ ma minimum, $l(r)$ ma minimum oraz wartości e i l w tych miejscach. Dla jakiego promienia $e(r) = 0$?

4. **Skala czasowa dla orbity marginalnie stabilnej** Orbita, której odpowiada minimum energii (i momentu pędu) określana jest jako *marginalnie stabilna*. Jaki jest okres obiegu cząstki na tej orbicie ($r_{ms}:\ e(r_{ms}) = min[e(r)]$) wokół masy $M = 10^8\ M_{\odot}$?

5. **Efekt Dopplera na wewnętrznym brzegu dysku** Proszę ocenić stosunek ekstremalnie przesuniętych częstości (ku krótszym i dłuższym długościom fali) dla źródeł krążących po orbicie marginalnie stabilnej i obserwatora w płaszczyźnie dysku. Rachunek wykonujemy w ramach STW, prędkość obliczamy używając przybliżeń Paczyńskiego i Witty.

Zadania 08

1. **Głębokość katalogu** Przestrzeń wypełniona jest identycznymi kulami o promieniu R, które są rozłożone jednorodnie. Możemy obserwować wszystkie te obiekty aż do odległości D (*głębokość katalogu*). Jaki jest średni rozmiar kątowy obiektów w odległościach $d \leq D$?

2. **Typowe rozmiary kątowe a graniczny strumień obserwowany** Obiekty o rozkładzie mocy promieniowania $n(L)$ i promieniu zależącym od jasności:

$$R = R_0 \left(\frac{L}{L_0} \right)^{1/2}$$

są rozłożone jednorodnie. Jakie są średnie rozmiary kątowe obiektów jaśniejszych od granicznego strumienia $F \geq F_{lim}$?

3. **Oczekiwana gęstość powierzchniowa** Identyczne obiekty o jasności powierzchniowej $I(R) = I_0(R/R_0)^{1-\gamma}$ są rozmieszczone jednorodnie w przestrzeni. Jaka jest oczekiwana jasność powierzchniowa $< I(\Theta) >$ w odległości kątowej Θ od centrum dla obiektów w odległościach nie większych niż D ?

4. **Oczekiwana liczba sąsiadów** Ilu sąsiadów neleży oczekiwać w sferze o promieniu r_0 wokół danego obiektu? Ilu obiektów można oczekiwać w sferze o tym samym promieniu, ale losowo umieszczonej w przestrzeni? Jaki jest stosunek tych liczb? 3D funkcja autokorelacji ma postać

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\gamma}$$

średnia gęstość obiektów w przestrzeni to n .

5. **Prawo Hubble'a wg poprzedników** W przestrzeni wprowadzamy współrzędne, które pozostają niezmienne dla położeń poszczególnych obiektów, a ekspansja Wszechświata opisana jest poprzez zmieniający się w czasie czynnik skali $a(t)$. W tym ujęciu wzajemną odległość dwóch obiektów $r = |\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_2|$ można zapisać jako

$$r = a(t) \cdot \chi$$

gdzie χ to (niezmienna w czasie) współrzędna radialna obiektu 2 względem 1. Proszę zapisać związek pomiędzy prędkością oddalania się obiektów a ich odległością używając r, $\dot{a}$ i a. Jak wyraża się mierzona dzisiaj stała Hubble'a poprzez te wielkości ? A jaką wartość stałej Hubble'a zmierzyliby obserwatorzy w czasie t ? Przypuśćmy w szczególności, że

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}$$

Jaka jest wartość stałej Hubble'a w $t = t_0$? I na odwrót: jak wyraża się czas ekspansji Wszechświata od początku ($t = 0$) do dzisiaj ($t = t_0$) poprzez stałą Hubble'a H_0 ?

6. **Rzut pionowy** Z bieguna planety o promieniu R_0 wystrzeliwano pionowo w górę pociski z różnymi początkowymi prędkościami V. Dla prędkości $V \geq V_0$ pociski nie spadały już na powierzchnię planety. Jaki jest związek pomiędzy średnią gęstością planety $< \rho >$ a R_0 i V_0 ?

7. **Równanie Limbera** Proszę znaleźć postać 2D funkcji autokorelacji dla obiektów, których korelacje w 3D dają się opisać funkcją potęgową:

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma}$$

   Przyjmujemy, że obiekty wypełniają w 3D sferę o promieniu $D \gg r_0$ wokół obserwatora.

Zadania 09

1. **Dynamika ekspansji** Używając newtonowskiego modelu ekspansji Wszechświata:
$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{2GM}{R} + \frac{2E}{m}}$$
znajdź zależność $R(t)$ w wyróżnionym przypadku $E = 0$. (Można wprowadzić stałe R_0, t_0 jako warunek początkowy dla pow. równania: $R(t_0) = R_0$. Jeśli t_0 oznacza czas odpowiadający dzisiejszej epoce ekspansji Wszechświata, to jaki jest związek tego parametru ze stałą Hubble'a H_0?

2. **Dynamika ekspansji** Używając newtonowskiego modelu ekspansji Wszechświata:
$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{2GM}{R} + \frac{2E}{m}}$$
znajdź jego rozwiązanie w postaci parametrycznej $R(\eta)$, $t(\eta)$ w przypadku $E < 0$. **Wskazówka:** w tym przypadku promień rozważanej kuli osiąga wartość maksymalną R_m. Wyznaczamy ją przyrównując wyrażenie pod pierwiastkiem do zera. Następnie można użyć R_m w równaniu, pozbywając się E i m. Rozwiązania poszukujemy w postaci:
$$R(\eta) = R_m \sin^2 \eta$$

3. **Dynamika ekspansji** Używając newtonowskiego modelu ekspansji Wszechświata:
$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{2GM}{R} + \frac{2E}{m}}$$
znajdź jego rozwiązanie w postaci parametrycznej $R(\eta)$, $t(\eta)$ w przypadku $E > 0$. **Wskazówka:** w tym przypadku możemy wprowadzić formalnie parametr
$$R_m = \frac{GMm}{E}$$
choć nie ma on oczywistej fizycznej interpretacji. Rozwiązania poszukujemy w postaci:
$$R(\eta) = R_m \sinh^2 \eta$$

4. **Wartość „dzisiejsza" parametru** η Korzystając z wyników zadań 1 – 4, proszę wyrazić dzisiejszą wartość parametru η przez parametr gęstośći Ω. Pozwala to określić czas jaki upłynął od początku ekspansji w modelach z $E \neq 0$. Jaki on jest?

5. **I zasada termodynamiki** Używając równań Einsteina dla izotropowego i jednorodnego modelu:
$$\frac{2}{a}\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{8\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P)$$
$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon$$

pokaż, że:

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon a^3) + P\frac{d}{dt}(a^3) = 0$$

6. **Zależność gęstości od czynnika skali** Używając wyników poprzedniego zadania, zbadaj związek pomiędzy gęstością energii ε a czynnikiem skali a dla następujących równań stanu: a) $P = 0$ ("pył") b) $P = \frac{1}{3}\varepsilon$ ("gaz relatywistyczny") c) $P = -\varepsilon$ (stała kosmologiczna")

7. **Gęstość energii na początku** W równaniu opisującym ekspansję w modelu relatywistycznym

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon$$

człon "krzywiznowy"(proporcjonalny do k) jest proporcjonalny do $1/a^2$. Natomiast w prawej stronie, przy relatywistycznym równaniu stanu ($P = \frac{1}{3}\varepsilon$) mamy człon zależący od wyższej potęgi czynnika skali a (jakiej?). Jak można przybliżyć równanie dla $a \to 0$? Jaką zależność $a(t)$ otrzymamy? A jak zależy od czasu gęstość energii $\varepsilon(t) =$?

Zadania 10

1. **Odległości bliskich punktów** Element liniowy ma postać:

$$dl^2 = a^2(d\chi^2 + S^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2))$$

Dwa punkty mają różne współrzędne $\chi_1 = \chi$ oraz $\chi_2 = \chi + \Delta\chi$, a pozostałe ($\theta$ i ϕ) równe. Jaka jest ich odległość?

A jeśli $\chi_1 = \chi_2$ i $\phi_1 = \phi_2$ a $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta$?

A jeśli $\chi_1 = \chi_2$ i $\theta_1 = \theta_2$ a $\phi_2 = \phi_1 + \Delta\phi$?

2. **Geometria w jednorodnej i izotropowej przestrzeni 3D** Element liniowy ma postać:

$$dl^2 = a^2(d\chi^2 + S^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2))$$

($S(\chi)$ jest naszym standardowym oznaczeniem.) Jaka jest długość krzywej opisanej równaniami $\chi = \chi_0$, $\theta = \theta_0$, dla $0 \le \phi \le 2\pi$? Jakie jest pole powierzchni opisanej równaniem $\chi = \chi_0$ dla $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$? Jaka jest objętość obszaru odpowiadającego współrzędnym w zakresie: $0 \le \chi \le \chi_0$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$?

3. **I zasada termodynamiki** Używając równań Einsteina dla izotropowego i jednorodnego modelu:

$$\frac{2}{a}\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{8\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P)$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon$$

pokaż, że:

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon a^3) + P\frac{d}{dt}(a^3) = 0$$

4. **Zależność gęstości energii od czynnika skali** Wykorzystując wynik poprzedniego zadania, oblicz jak zależy od czynnika skali gęstość energii ε dla równania stanu:

$$P = w\varepsilon$$

Rozważ $w \in \{-1, -2/3, -1/3, 0, 1/3\}$

5. **Gęstość materii w modelu płaskim z zimną materią** W przypadku $k = 0$, $P = 0$ ($\Rightarrow \Omega_M = 1$), ekspansja opisana jest równaniem:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

gdzie $a(t)$ jest czynnikiem skali, a $\rho(t)$ gęstością materii. Jak ρ zależy od czasu? (Chodzi o zależność od czasu jako jedynej zmiennej, bez używania a, z itp)

6. **Gęstość energii w modelu płaskim z relatywistyczną materią** W przypadku $k = 0$, $P = \frac{1}{3}\varepsilon$ ($\Rightarrow \Omega_r = 1$), ekspansja opisana jest równaniem:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon$$

gdzie $a(t)$ jest czynnikiem skali, a $\varepsilon(t)$ gęstością energii. Jak ε zależy od czasu? (Chodzi o zależność od czasu jako jedynej zmiennej, bez używania a, z itp).

7. **Wiek Wszechświata** Rozważamy płaskie modele, w których $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$, a pozostałe składniki pomijamy (dla nich $\Omega_i = 0$; w szczególności $\Omega_r = 0$ i $\Omega_K = 0$). Używając wzoru

$$H_0\frac{dt}{dz} = \frac{1}{(1+z)\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}$$

określ wiek Wszechświata. Czy wiek Wszechświata jest rosnącą, czy malejącą funkcją Ω_Λ dla płaskich modeli?

8. **Stała Hubble'a, gęstość „dawno temu"** Wykorzystująs równanie ewolucji czynnika skali (zadania powyższe) oraz związek przesunięcia ku czerwieni z czynnikiem skali zbadaj:

   - jak zależy od przesunięcia ku czerwieni $H(t) \equiv \dot{a}/a$
   - jak zależy od niego stosunek gęstości do gęstości krytycznej $\rho(t)/\rho_c(t)$, gdzie $\rho_c(t) \equiv 3H^2(t)/8\pi G$

Zadania 11

1. **Akademicki model płaski** Rozważamy model, w którym gęstość zimnej materii jest krytyczna ($\Omega_M = \rho_M/\rho_c = 1$), a inne składniki są nieistotne ($\Omega_i = 0$ dla $i \neq M$). Tutaj zależność współrzędnej radialnej od przesunięcia ku czerwieni ($\chi(z)$) daje się wyrazić explicite przy pomocy prostej zależności. Jaka to zależność? Jak zależą od z odległości „na podstawie pomiaru rozmiarów kątowych" (u nas $R(z)$), „współporuszająca się" ($D_{com}(z)$), i „jasnościowa" ($D(z)$) ?

2. **Grubość optyczna w płaskim modelu** Jak wyraża się grubość optyczna ze względu na rozpraszanie na swobodnych elektronach $\tau(z)$ w płaskim modelu przy założeniu całkowitej jonizacji i jednorodności rozkładu plazmy? ($\Omega_M = 1$, inne znikają, $c/H_0 = 4000$ Mpc, $\sigma_e = 0.66 \times 10^{-24}\mathrm{cm}^2$, $n_e(t_0) = 0.2/\mathrm{m}^3$, co odpowiada $\Omega_B = 0.05$; dopełnieniem do $\Omega_M = 1$ jest ciemna materia). Grubosc optyczna to:

$$\tau(z) = \int_0^z n_e(z)\sigma_e \frac{dl}{dz'}dz'$$

3. **Sygnał z antypodów?** Wyobraźmy sobie źródło istniejące „na początku" ewolucji Wszechświata. Przypuśćmy, ze adekwatny jest model zamknięty wypełniony zwykłą materią ($\Omega_M > 1$, $\Omega_K = 1 - \Omega_M$ $\Omega_i = 0$ dla pozostałych i). Czy sygnał z tego źródła mógł obiec przestrzeń i wrócić do miejsca emisji? Czy mógł dotrzeć na antypody? **Wskazówka** Skorzystaj z parametrycznego opisu ewolucji Wszechświata.

4. **„Odległość" do horyzontu w płaskim modelu** W jakiej odległości od obserwatora znajdują się „dzisiaj" obiekty znajdujące się na horyzoncie w płaskim modelu wypełnionym zwykłą materią? ($\Omega_M = 1$, $\Omega_K = 1 - \Omega_M = 0$ $\Omega_i = 0$ dla innych). **Wskazówka** Chodzi o odległość mierzoną w przestrzeni w obecnym ($t = t_0$) stadium ekspansji.

5. **Maksimum odległości na podstawie rozmiarów kątowych w płaskim modelu** Jak w funkcji przesunięcia ku czerwieni wyraża się *odległość na podstawie rozmiarów kątowych* w płaskim modelu wypełnionym zwykłą materią? (Parametry jak w poprzednim zadaniu). Czy ma maksimum? Dla jakiego z? Jaka jest ta maksymalna wartość odległości?

6. **Odległość na podstawie rozmiarów kątowych w innych modelach** Czy w modelach o innych parametrach (zestaw Ω_i) występuje maksimum odległości na podstawie rozmiarów kątowych?

7. **Jasność powierzchniowa radioźródła** Zakładamy, że radioźródło nie ewoluuje i ma potęgowe widmo:

$$I(\nu) = I_0 \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{-\alpha}$$

Jaką jasność powierzchniową zmierzy obserwator w częstości $\nu_{obs} = \nu_0$, w przypadku źródła o przesunięciu z?

Zadania 12

1. **Obłoki Ly-α** Przyjmijmy (dla uproszczenia), iż obłoki neutralnego wodoru, mogące absorbować promieniowanie o długościach fali odpowiadających przejściom serii Lymana w atomie wodoru, są nieewoluującymi kulami o promieniu r. Obecna koncentracja tych obłoków to n_0, a w przeszłości (dla $z \leq 6$) było to $n_0(1+z)^3$. Obserwujemy odległe źródło (np QSO) o dużym przesunięciu ku czerwieni, np $z_{QSO} > 2$. Każdy obłok na linii widzenia, o przesunięciu $0 \leq z \leq z_{QSO}$, może wywołać w obserwowanym widmie absorpcję w długości fali $(1+z)\lambda_\alpha$ (gdzie $\lambda_\alpha = 1216$ odpowiada przejsciu Ly-α.

   Jak zależy zagęszczenie liczby linii w funkcji długości fali, $dN/d\lambda =$? (W zakresie, wktórym linie mogą wystąpić, czyli $\lambda_\alpha \leq \lambda \leq (1+z_{QSO})\lambda_\alpha$).

2. **Diagram Hubble'a dla specyficznie ewoluujących źródeł**. Przypuśćmy, że badamy klasę źródeł, których moc promieniowania jest zadaną funkcją przesunięcia ku czerwieni $L(z) = L_0(1+z)^2$. Jak dla takich źródeł wygląda zależność bolometrycznego strumienia promieniowania od przesunięcia ku czerwieni w płaskim modelu kosmologicznym ($\Omega_M = 1, P = 0, \Omega_i = 0,\ i \neq M$)?

3. **Zliczenia specyficznie ewoluujących źródeł** Przypuśćmy, że specyficznie ewoluujące źródła z poprzedniego zadania mają gęstość przestrzenną zmieniającą się tylko wskutek ekspansji Wszechświata, $n(z) = n_0(1+z)^3$, a ich obecna moc ma wartość L_0. Jaki byłby rezultat zliczeń takich źródeł, to znaczy ile obiektów o obserwowanym strumieniu większym od zadanej wartości F_{lim} zaobserwujemy na całym niebie w płaskim modelu kosmologicznym? ($\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1, P = 0$).

4. **Wariant poprzedniego zadania** Jaki byłby wynik zliczeń, jeśli funkcja świecenia dla źródeł ma obecnie formę $n(L_0)$ i wiadomo, że każde ze źródeł było w przeszłości jaśniejsze $(1+z)^2$ razy?

5. **Zliczenia obiektów** Funkcja jasności dana jest wzorem:

$$n(L,z) = \frac{n_0}{L_0}(1+z)^3 \left(\frac{L}{L_0}\right)^{-2} \qquad L \geq L_0$$

   (i $n(L,z) = 0$ dla $L < L_0$). Ile obiektów o obserwowanym strumieniu $\geq F_0$ widocznych jest na całym niebie?

6. **Paradoks Olbersa** Przestrzeń wypełniona jest źródłami promieniowania o niezmiennej mocy L_0, z gęstością $n(z) = n_0(1+z)^3$ zmieniającą się tylko wskutek ekspansji Wszechświata. Jaka jest bolometryczna jasność powierzchniowa nieba pochodząca od tych obiektów?

7. **Paradoks Olbersa -wariant** Przestrzeń wypełniona jest źródłami promieniowania o funkcji świecenia $n(L)$. Źródła nie ewoluują, a ich gęstość $n(z) = n_0(1+z)^3$ zmienia się tylko wskutek ekspansji Wszechświata. Jaka jest bolometryczna jasność powierzchniowa nieba pochodząca od tych obiektów?

8. **Paradoks Olbersa -wariant** Przestrzeń wypełniona jest źródłami promieniowania, obecnie charakteryzującymi się funkcją świecenia $n(L)$. Źródła ewoluują zgodnie z zależnością $L = L_0(1+z)^2$, a ich gęstość $n(z) = n_0(1+z)^3$ zmienia się tylko wskutek ekspansji Wszechświata. Jaka jest bolometryczna jasność powierzchniowa nieba pochodząca od tych obiektów?

- **Zliczenia specyficznie ewoluujących źródeł - bis** Znowu: $L(z) = L_0(1+z)^2$ oraz $n(z) = n_0(1+z)^3$. Dokonujemy zliczeń w różnych modelach płaskich, w których $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$, $\Omega_M > 0$. Czy wynik zliczeń źródeł jaśniejszych od F_{lim} ($N(> F_{lim})$) zależy od gęstości materii (Ω_M) przy ustalonym H_0 ? A czy liczba wszystkich źródeł w obserwowalnym Wszechświecie zależy od tego parametru ?

- **Zliczenia specyficznie ewoluujących źródeł - ter** Znowu: $L(z) = L_0(1+z)^2$ oraz $n(z) = n_0(1+z)^3$. Dokonujemy zliczeń w różnych modelach, w których $\Omega_M = 1+\varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, $\Omega_i = 0, i \neq M$. Jak wynik zliczeń źródeł jaśniejszych od F_{lim} ($N(> F_{lim})$) zależy od gęstości materii (Ω_M) przy ustalonym H_0 ? A czy liczba wszystkich źródeł w obserwowalnym Wszechświecie zależy od tego parametru ?

- **Zliczenia fotonów** W astronomii X oraz γ obserwowaną wielkością jest liczba fotonów zarejestrowanych w zadanym przedziale energii, w ustalonym przedziale czasowym. Jak taka wielkość obserwowana wiąże się z mocą promieniowania źródła o przesunięciu ku czerwieni z? (Przyjmujemy, że znane jest widmo energetyczne źródła, $L(E)$.)

Zadania 13

1. **Tło od źródeł o potęgowych widmach** Źródła o widmie energetycznym:

$$L_\nu = L_{\nu_0}^{(0)} \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{-\alpha}$$

rozmieszczone są jednorodnie i nie ewoluują, a ich koncentracja zmienia się tylko wskutek ekspansji, $n(z) = n_0(1+z)^3$. Jakie jest tło promieniowania od tych źródeł w częstości ν_0?

2. **Tło od słabych obiektów** Słabe obiekty nie są obserwowane indywidualnie, ale ich promieniowanie kontrybuuje do tła. Pewna klasa obiektów ma rozkład mocy promieniowania:

$$n(L,z)dL = n_0(1+z)^3 \frac{L^*}{L} \frac{dL}{L^*}$$

Jakie jest tło od obiektów, dla których obserwowany strumień bolometryczny $F \leq F_0$?

3. **Statystyki kwantowe i gęstość neutrin** W LRT prawdopodobieństwo obsadzenia stanu w przestrzeni fazowej dane jest funkcją

$$f(E) = \frac{1}{h^3} \frac{1}{\exp(E/kT) \pm 1}$$

gdzie plus odpowiada fermionom (elektrony, neutrina,..) a minus bozonom (fotony, gluony, ...) Pomijamy tu potencjał chemiczny, zakładając że $kT \gg mc^2$ i liczba cząstek i antycząstek jest taka sama. Koncentrację cząstek w przestrzeni otrzymamy całkując po przestrzeni pędów i uwzględniając wagę statystyczną g ($g = 2$ dla fotonu, elektronu,...; $g = 1$ dla neutrin):

$$n = \frac{g}{h^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{\exp(E(p)/kT) \pm 1}$$

Korzystając z toższmości

$$\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x + 1} \equiv \frac{2}{e^{2x} - 1}$$

oblicz stosunek koncentracji neutrin do fotonów w LRT przy $kT \gg m_e c^2$, gdy można użyć przybliżenia $E = pc$. Podobnie, w tym samym reżimie, oblicz stosunek gęstości energii neutrin i fotonów. (Wzór na gęstość energii ma postać:

$$\varepsilon = \frac{g}{h^3} \int_0^\infty \frac{4\pi pc * p^2 dp}{\exp(pc/kT) \pm 1}$$

4. **Entropia relatywistycznego gazu i liczba neutrin dzisiaj.** Przy $kT \gg 1$ MeV neutrina i fotony były w równowadze i stosunek ich koncentracji wynikał z rozwiązania poprzedniego zadania. (Neutrina i antyneutrina to w

sumie 6 różnych cząstek, każde ma 1 stan polaryzacji, a każdy foton dwa). Fotony elektrony i pozytony stanowiły na początku trój- a na końcu jednoskładnikowy gaz relatywistyczny. Jego entropia została zachowana, bo nie było mechanizmu przekazania ciepła czemukolwiek innemu. (Entropia fotonów w objętości V_0 i temperaturze T_0 dzisiaj równa jest sumarycznej entropii fotonów, elektronów i pozytonów kiedyś, przy przesunięciu ku czerwieni $z > 10^9$, w objętości $V_0/(1+z)^3$ pzry temperaturze T_1, którą trzeba wyznaczyć. Jaka jest dzisiejsza "temperaturańeutrin $T_\nu = T_1/(1+z)$? Jaka jest sumaryczna dzisiejsza koncentracja wszystkich typów neutrin, jeśli dla fotonów wynosi ona $n_\gamma = 400 \times 10^6/\mathrm{m}^3$?

5. **Grubość sfery ostatniego rozproszenia** Przyjmujemy, że rekombinacja wodoru nastąpiła przy $z = 1100$, tzn wtedy stopień jonizacji wynosił 50%, że $\Omega_B = 0.05$, $\Omega_M = \Omega_{dark} + \Omega_B = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $c/H_0 = 3000$ Mpc$/h$. Proszę policzyć drogę swobodną fotonów l_γ ze względu na rozpraszanie w czasie rekombinacji. Jakie wartości miałyby:

$$\Delta t = \frac{l_\gamma}{c} \qquad \Delta v = \frac{\dot{a}}{a} l_\gamma \qquad \Delta z : l_\gamma = \frac{dct}{dz} \Delta z$$

6. **Niestabilność we wczesnym Wszechświecie** Równanie na ewolucję **małych, adiabatycznych** zaburzeń gęstości w jednorodnym modelu Wszechświata ma postać:

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d}{dt}\delta + \left[\frac{k^2 c_S^2}{a^2} - 4\pi G\rho \left(1 + \frac{P}{\varepsilon}\right)\left(1 + 3\frac{c_S^2}{c^2}\right)\right]\delta = 0$$

Jakie 2 podstawowe rozwiązania ma to równanie w modelu relatywistycznym, obowiązującym przy $z \geq 10^5$, w którym $P = \varepsilon/3$? Proszę rozważyć tylko sytuację zaburzeń w dużej skali, kiedy pierwszy człon w "[...]"można pominąć.

Przypomnienie: gęstość w tym modelu i zależność skali od czasu dane są przez:

$$\rho = \frac{3}{32\pi G t^2} \qquad a(t) = a_1 \left(\frac{t}{t_1}\right)^{1/2}$$

Zadania 14

1. **Niestabilność w późnym Wszechświecie** Równanie na ewolucję **małych, adiabatycznych** zaburzeń gęstości w jednorodnym modelu Wszechświata ma postać:

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d}{dt}\delta + \left[\frac{k^2 c_S^2}{a^2} - 4\pi G\rho\left(1+\frac{P}{\varepsilon}\right)\left(1+3\frac{c_S^2}{c^2}\right)\right]\delta = 0$$

   Jakie 2 podstawowe rozwiązania ma to równanie w modelu zdominowanym przez zimną materię (obowiązującym przy $z \leq 10^3$), w którym $P = 0$ a $\Omega_M = 1$? Proszę rozważyć tylko sytuację zaburzeń w dużej skali, kiedy pierwszy człon w "[...]"można pominąć.

   Przypomnienie: gęstość w tym modelu i zależność skali od czasu dane są przez:

$$\rho = \frac{1}{6\pi G t^2} \qquad a(t) = a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$$

2. **Skala kątowa zaburzeń** Jakiej skali kątowej na mapach anizotropii mikrofalowego promieniowania tła odpowiadają zaburzenia o masie $10^{12}\ M_\odot$? A $10^{15}\ M_\odot$? ($\Omega_M = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, c/H_0=3000 Mpc/h .) **Wskazówka:** Z jak dużego kulistego obszaru należałoby zgromadzić materię by zebrać wspominane w zadaniu ilości? Jakie były jego rozmiary podczas rekombinacji, przy $z_{\rm rec} \approx 1100$? Jaka jest odległość do tego "z"?

3. **Zaburzenia potencjału grawitacyjnego** Dla zaburzeń w skalach mniejszych od horyzontu można stosować opis newtonowski. Równanie Poissona

$$\Delta\delta\phi = 4\pi G\delta\rho$$

   wiąże zaburzenia potencjału z zaburzeniami gęstości. Interesują nas relacje obowiązujące w czasie rekombinacji, bo wtedy promieniowanie oddziela się od materii i wtedy kształtują się pierwotne fluktuacje jego temperatury. Ekspansja Wszechświata jest wtedy opisana przez model bez ciśnienia ($P = 0$), gęstość materii jest praktycznie krytyczna więc:

$$a(t) = a_{rec}(t/t_{rec})^{2/3} \qquad \delta(t) = \delta_{rec}(t/t_{rec})^{2/3} \qquad \rho_0(t) = \frac{1}{6\pi G t^2}$$

   gdzie δ jest względnym zaburzeniem gęstości, a $\delta\rho = \rho_0\delta$. Jaki jest związek pomiędzy bezwymiarowymi wielkościami $\delta\phi_k/c^2$ a δ_k w przypadku zaburzeń typu fali płaskiej o liczbie falowej k ? Jak zależy od czasu zaburzenie potencjału? Jakie ograniczenie na długość fali $\lambda(t_{rek}) = 2\pi a(t_{rek})/k$ nakłada warunek $|\delta\phi_k/c^2| > |\delta_k|$? Jakiej dzisiejszej długości fali zaburzeń to odpowiada? Rekombinacja nastąpiła przy $z_{rec} \approx 1100$.)

4. **Problemy modelu bez ciemnej materii** Wykorzystując wyniki dotyczące tempa narastania zaburzeń gęstości w modelu nierelatywistycznym oraz fakt, iż obecnie $\delta > 1$ w skali galaktyk, oceń minimalną amplitudę anizotropii mikrofalowego promieniowania tła w odpowiadającej galaktykom

skali kątowej. Jak wynik ten ma się do obserwacji? Czy jest jakieś wyjście z tego paradoksu? **Wskazówka:** Dla adiabatycznych zaburzeń $n_\gamma \propto T_\gamma^3$.

5. **Spadek na gromadę w Pannie** Badanie względnych ruchów galaktyk pozwala stwierdzić, iż Grupa Lokalna przybliża się z prędkością $\delta v = 600$ km/s do centrum pobliskiej gromady w Pannie. Odległość od centrum to $R \approx (1200\ \mathrm{km/s})/H_0$, w kuli o promieniu R wokół centrum gromady nadwyżka galaktyk to $\delta n/n \approx 1$. Zakładając, iż ta dodatkowa masa działa na Grupę Lokalną pewnym przyspieszeniem przez czas rzędu $1/H_0$, oceń wartość parametru gęstości Ω_M.

6. **Zaburzenia prędkości** Równanie ciągłości wiąże ze sobą zmiany gęstości i dywergencję prędkości. Prędkość składa się z członu związanego z ekspansją Wszechświata oraz prędkością swoistą $\delta\vec{v}$, którą uważać można za małą. W pierwszym rzędzie mamy:

$$\partial_t \delta\rho + \nabla(\rho_0 \delta\vec{v}) + \nabla(\frac{\dot{a}}{a}\vec{r}\delta\rho) = 0 \qquad \vec{v} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r} + \delta\vec{v}$$

   Jaki jest związek zaburzeń prędkości z zaburzeniami gęstości typu fali płaskiej? Jak zależy od czasu ich amplituda? Dla jakiej wartości liczby falowej k $|\delta\vec{v}_k|/c$ staje się mniejsze od δ ? (Proszę wykorzystać też informacje w treści poprzedniego zadania).