

# Astronomia Pozagalaktyczna: odległości i wiek Wszechświata

Szymon Kozłowski

Uniwersytet Warszawski

2026



## Czynnik skali i redshift

$a(t)$  - opisuje względny rozmiar Wszechświata

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)} \quad (1)$$

## Równanie Friedmanna ( $a_0 = 1$ )

$$H^2 = H_0^2 \left( \frac{\Omega_R}{a^4} + \frac{\Omega_M}{a^3} + \frac{\Omega_K}{a^2} + \Omega_\Lambda \right) \quad (2)$$

$$H^2 = H_0^2 \left( \Omega_R (1 + z)^4 + \Omega_M (1 + z)^3 + \Omega_K (1 + z)^2 + \Omega_\Lambda \right) \quad (3)$$

Zjawiska we Wszechświecie “dzieją się” i w czasie i w przestrzeni. Aby zrozumieć relację dwóch zjawisk względem siebie musimy znać metrykę przestrzeni.

## Metryka czasoprzestrzeni

Metryka czasoprzestrzeni to matematyczny opis geometrii czasoprzestrzeni, który określa jak odległości (interwały) między zdarzeniami są mierzone, uwzględniając zarówno wymiary przestrzenne, jak i czasowy.

Odległość przestrzenna, 2D, przestrzeń płaska - Euklidesowa  
(Pitagoras)

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 \quad (4)$$

Odległość przestrzenna w rozszerzającym się Wszechświecie,  
2D, przestrzeń płaska

$$dl^2 = a(t)^2 (dx^2 + dy^2) \quad (5)$$

Odległość przestrzenna w rozszerzającym się Wszechświecie,  
3D, przestrzeń płaska

$$dl^2 = a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (6)$$

$x, y, z$  - współrzędne współporuszające się

Interwał czasoprzestrzenny  $ds$  jest “odległością” czasoprzestrzenną pomiędzy dwoma zdarzeniami A i B. Jest on invariantem, czyli wszyscy obserwatorzy mierzą go jako taki sam. Jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 \quad (7)$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (8)$$

## Tensor metryczny (kowariantny)

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

$\mu = 0, 1, 2, 3$  i  $\nu = 0, 1, 2, 3$

0 – składowa czasowa

1 – składowa "x"

2 – składowa "y"

3 – składowa "z"

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (9)$$

$$ds^2 = \sum_{\mu} \sum_{\nu} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (10)$$

$$dx^0 = cdt, dx^1 = dx, dx^2 = dy, dx^3 = dz$$

$$ds^2 = g_{00} dx^0 dx^0 + g_{11} dx^1 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2 + g_{33} dx^3 dx^3 \quad (11)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Odległość przestrzenna 3D, przestrzeń płaska, współrzędne kartezjańskie

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (12)$$

$x, y, z$  - współrzędne współporuszające się

Odległość przestrzenna 3D, przestrzeń płaska, współrzędne biegunowe

$$dl^2 = d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (13)$$

$\chi$  - współrzędna współporuszająca się

## Metryka Friedmanna-Lemaitre'a-Robertsona-Walkera (FLRW)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left( d\chi^2 + \begin{Bmatrix} \sin^2(\chi) \\ \chi^2 \\ \sinh^2(\chi) \end{Bmatrix} (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right) \quad (14)$$

## Metryka Friedmanna-Lemaitre'a-Robertsona-Walkera (FLRW)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left( \frac{d\chi^2}{1 + k\chi^2} + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right) \quad (15)$$

$$k = +1, k = 0, k = -1$$

## Metryka Friedmanna-Lemaitre'a-Robertsona-Walkera (FLRW)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left( \frac{d\chi^2}{1 + k\chi^2} + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right) \quad (16)$$

$$k = +1, k = 0, k = -1$$

## Światło

Światło porusza się wzdłuż linii widzenia, dlatego  $d\phi = 0$  i  $d\theta = 0$ . W płaskim Wszechświecie ( $k = 0$ ) mamy

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)d\chi^2 \quad (17)$$

## Światło

Światło porusza się wzdłuż współrzędnej  $\chi$ , dlatego  $d\phi = 0$  i  $d\theta = 0$ . W płaskim Wszechświecie ( $k = 0$ ) mamy

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\chi^2 \quad (18)$$

Światło porusza się wzdłuż linii geodezyjnej dla której

$$ds = 0 \quad (19)$$

czyli światło w ogóle nie przebywa “dystansu w czasoprzestrzeni”.

$$d\chi = \frac{cdt}{a(t)} \quad (20)$$

## Światło

$$d\chi = \frac{cdt}{a(t)} \quad (21)$$

$$\chi = \int_{\chi_{\text{em}}}^{\chi_{\text{obs}}} d\chi = \int_{t_{\text{em}}}^{t_{\text{obs}}} \frac{cdt}{a(t)} \quad (22)$$

Ale to co obserwujemy to redshift, zatem potrzebny jest redshift!

## Przekształcenia

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \rightarrow \dot{a} = Ha \rightarrow \frac{da}{dt} = Ha \quad (23)$$

$$dt = \frac{da}{Ha} \quad (24)$$

$$a(t) = \frac{a_0}{1+z} = a_0 (1+z)^{-1} \quad (25)$$

$$\frac{da}{dz} = \frac{d}{dz} \left( a_0 (1+z)^{-1} \right) = -a_0 (1+z)^{-2} \quad (26)$$

$$da = -a_0 (1+z)^{-2} dz \quad (27)$$

## Przekształcenia

$$\chi = \int_{\chi_{\text{em}}}^{\chi_{\text{obs}}} d\chi = \int_{t_{\text{em}}}^{t_{\text{obs}}} \frac{cdt}{a(t)} \quad (28)$$

$$dt = \frac{da}{Ha} \quad (29)$$

$$da = -a_0 (1+z)^{-2} dz \quad (30)$$

$$\chi(z_{\text{em}}) = \int_{z_{\text{em}}}^{z_{\text{obs}}} \frac{cda}{Ha(t)^2} \quad (31)$$

$$\chi(z_{\text{em}}) = \int_{z_{\text{em}}}^{z_{\text{obs}}} \frac{-ca_0 (1+z)^2 dz}{Ha_0^2 (1+z)^2} \quad (32)$$

## Przekształcenia

$$\chi(z_{\text{em}}) = \int_{z_{\text{em}}}^{z_{\text{obs}}} \frac{-ca_0 (1+z)^2 dz}{Ha_0^2 (1+z)^2} \quad (33)$$

$$\chi(z_{\text{em}}) = -\frac{c}{a_0} \int_{z_{\text{em}}}^{z_{\text{obs}}} \frac{dz}{H(z)} \quad (34)$$

Podstawiamy:  $z_{\text{em}} = z$ ,  $z_{\text{obs}} = 0$ , minus znika, bo zamieniamy granice całkowania;  $a_0 = 1$ :

$$\chi(z) = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (35)$$

Jest to odległość współporuszająca się wzdłuż linii widzenia (line-of-sight comoving distance).

## Przekształcenia

$$\chi(z) = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (36)$$

$$H(z)^2 = H_0^2 \left( \Omega_R (1+z)^4 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_K (1+z)^2 + \Omega_\Lambda \right) \quad (37)$$

$$H(z)^2 = H_0^2 E(z)^2 \quad (38)$$

$$E(z) = \sqrt{\Omega_R (1+z)^4 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_K (1+z)^2 + \Omega_\Lambda} \quad (39)$$

## Odległość współporuszająca

$$\chi(z) = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (40)$$

$$\chi(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (41)$$

$$\chi(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_R (1+z')^4 + \Omega_M (1+z')^3 + \Omega_K (1+z')^2 + \Omega_\Lambda}} \quad (42)$$

## Luminosity distance

$$D_L = (1+z)a(t_{\text{obs}})\chi = (1+z)a_0\chi = (1+z)\chi \quad (43)$$

$$\chi(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (44)$$

$$D_L(z) = (1+z) \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (45)$$

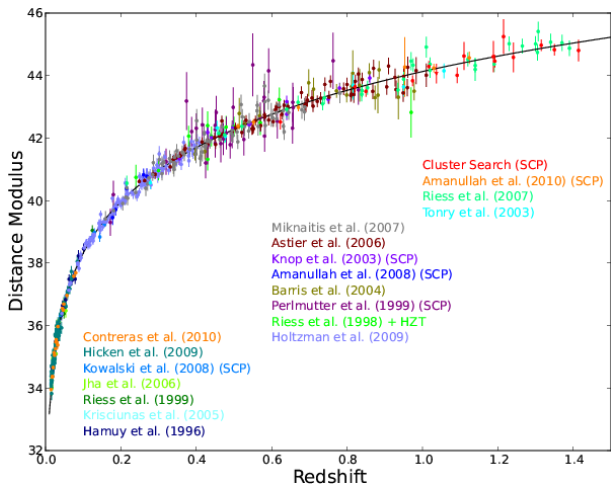
Odległość jasnościowa:

$$D_L(z) = (1 + z) \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (46)$$

Moduł odległości:

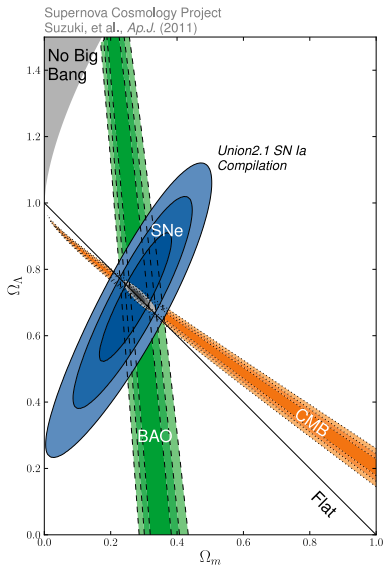
$$\mu = m - M = 5 \log(D_L(z)) - 5 + A + K \quad (47)$$

# Model kosmologiczny



Supernova Cosmology Project

# Model kosmologiczny



## Metryka Friedmanna-Lemaitre'a-Robertsona-Walkera (FLRW)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left( \frac{d\chi^2}{1 + k\chi^2} + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right) \quad (48)$$

$$k = +1, k = 0, k = -1$$

## Interwał prostopadły do linii widzenia

$$k = 0, d\chi = 0, d\phi = 0, dt = 0$$

$$ds^2 = a^2(t)\chi^2 d\theta^2 \quad (49)$$

## Definicja

$$D_A = \frac{ds}{d\theta} \quad (50)$$

$$D_A = \frac{ds}{d\theta} = \frac{a(t)\chi d\theta}{d\theta} = a(t)\chi \quad (51)$$

$$D_A(z) = a(t)\chi = \frac{a_0}{1+z} \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (52)$$

$$D_A(z) = \frac{c}{(1+z)H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (53)$$

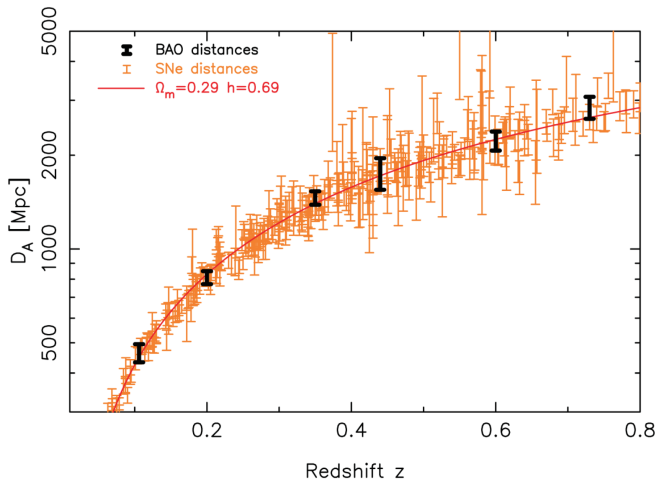
$$D_A(z) = \frac{c}{(1+z)H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (54)$$

$$D_L(z) = \frac{(1+z)c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (55)$$

Równanie Etheringtona (Etherington's Distance-Duality Equation):

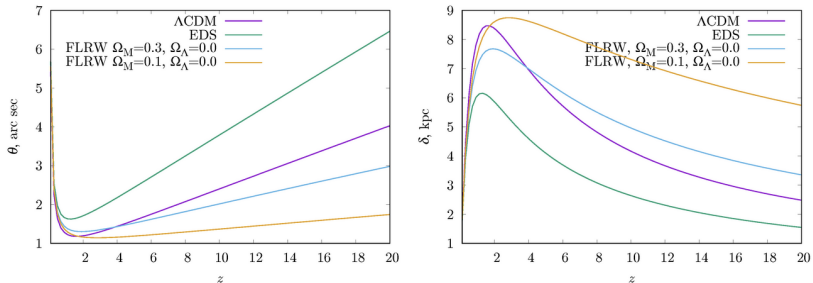
$$D_L(z) = (1+z)^2 D_A(z) \quad (56)$$

# Model kosmologiczny



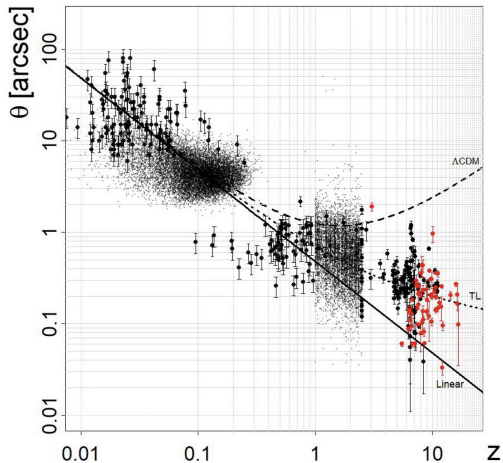
WiggleZ – BAO

# Model kosmologiczny



**Figure 2.** Angular diameter of a 10 kpc-size object (**left**) and the linear diameter  $\delta$  of a one-arcsec-size object (**right**) as functions of redshift  $z$ , corresponding to various models within the expanding-universe framework (FLRW). The purple curves show the  $\theta(z)$  relation for the standard  $\Lambda$ CDM model with  $\Omega_M = 0.3$  and  $H_0 = 70.0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . The green curves correspond to the Einstein-de Sitter Universe  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$ . The blue and yellow curves show  $\theta(z)$  for two values of  $\Omega_M$  for FLRW models without dark energy.

# Model kosmologiczny



**Figure 5.** Angular diameters of a 10-kpc-size object as expected to be seen at different redshifts within the frameworks of  $\Lambda$ CDM (dashed curve) and of the non-expanding Universe model, TL (dotted curve). These expectations are compared with the actual angular sizes found in the recent JWST observations (red points) and some pre-JWST observations (black points). The solid curve indicates the simplest linear function for angular diameters based on the Hubble constant  $H_0$ .

## Przekształcenia

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \rightarrow \dot{a} = Ha \rightarrow \frac{da}{dt} = Ha \quad (57)$$

$$dt = \frac{da}{Ha} = \frac{da}{dz} \frac{dz}{Ha} \quad (58)$$

$$a(t) = \frac{a_0}{1+z} = a_0 (1+z)^{-1} \quad (59)$$

$$\frac{da}{dz} = \frac{d}{dz} \left( a_0 (1+z)^{-1} \right) = -a_0 (1+z)^{-2} \quad (60)$$

$$dt = -\frac{dz}{H_0 E(z)(1+z)} \quad (61)$$

## Przekształcenia i lookback time

$$dt = -\frac{dz}{H_0 E(z)(1+z)} \quad (62)$$

$$t = \int_{t_1}^{t_2} dt = -\frac{1}{H_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{(1+z')E(z')} \quad (63)$$

## Wiek Wszechświata

$$t = \frac{1}{H_0} \int_{z=0}^{z=\infty} \frac{dz'}{(1+z')\sqrt{\Omega_R(1+z')^4 + \Omega_M(1+z')^3 + \Omega_K(1+z')^2 + \Omega_\Lambda}} \quad (64)$$

# Wiek Wszechświata i lookback time

$$t = \frac{1}{H_0} \int_{z_2}^{z_1} \frac{dz'}{(1+z')E(z')} \quad (65)$$

$z_2$	$z_1$	lookback time ( $\times 10^9$ lat)
0	1	7.82
0	2	10.41
0	3	11.55
0	4	12.17
1	2	2.59
2	3	1.15
3	4	0.61
4	5	0.37
0	$\infty$	13.73

dla  $\Omega_M = 0.286$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.714$ ,  $H_0 = 69.6$  km/s/Mpc