

Wprowadzenie do kosmologii klasycznej: Część pierwsza

Szymon Kozłowski

Uniwersytet Warszawski

2022-2025



Wprowadzenie

Czym jest kosmologia?

Kosmologia jest nauką zajmującą się badaniem Wszechświata jako całości z użyciem równań. Galaktyki w takim opisie traktowane są jak punkty materialne.

Zasada Kopernikańska

Nie żyjemy w wyróżnionym miejscu Wszechświata.

Izotropowość

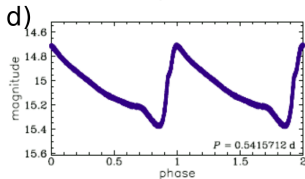
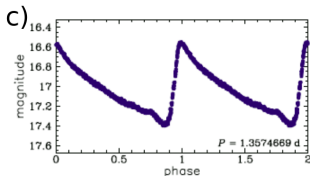
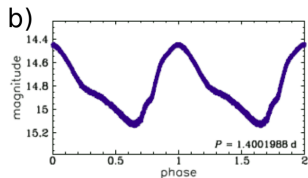
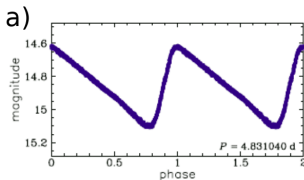
Wszechświat jest taki sam w każdym kierunku.

Jednorodność

Wszechświat jest taki sam w każdym miejscu.

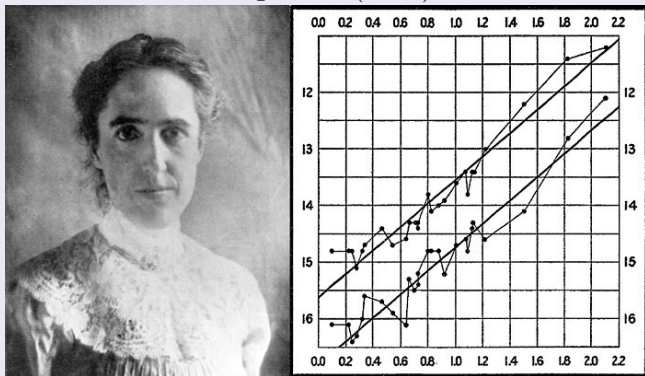
Henrietta Leavitt (1868-1921)

Henrietta - zmienność Cefeid w Obłokach Magellana (1908).

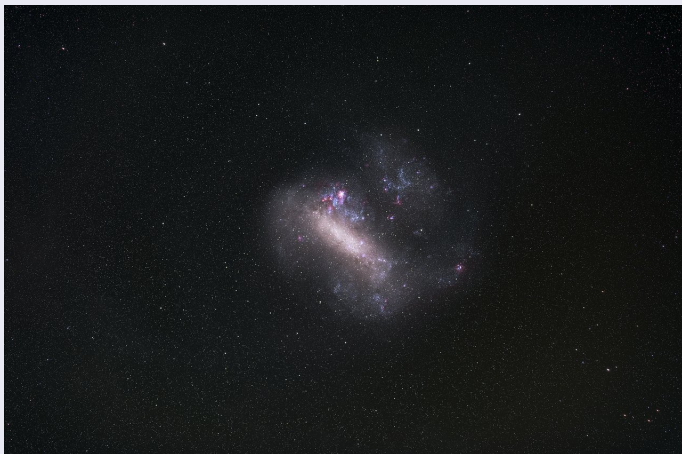


Henrietta Leavitt (1868-1921)

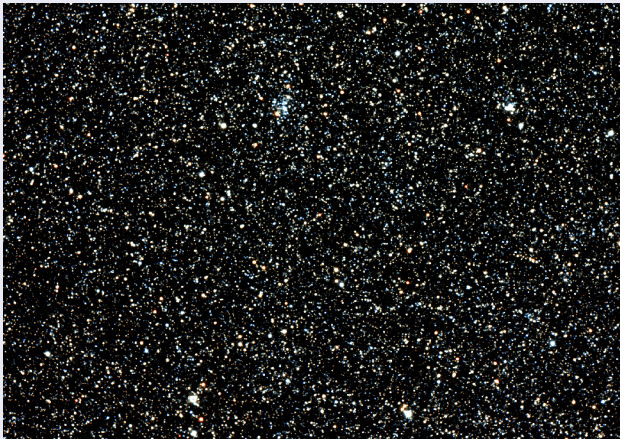
Odkrycie zależności okres-jasność dla Cefeid w Obłokach Magellana (1912).



Wielki Obłok Magellana (LMC)

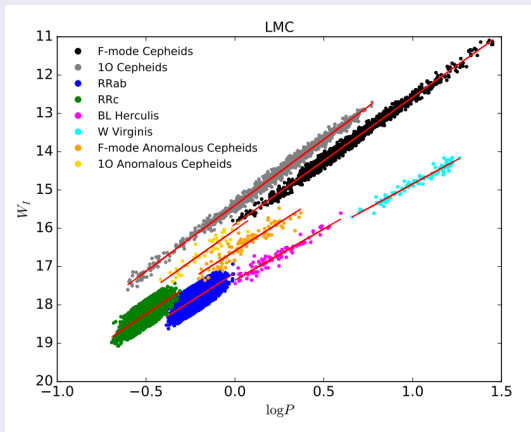


Wielki Obłok Magellana (LMC) - OGLE (1/4 czipu)



Zależności okres-jasność dla Cefeid

OGLE



Historia

Edwin Hubble - prawo Hubble'a (1929)

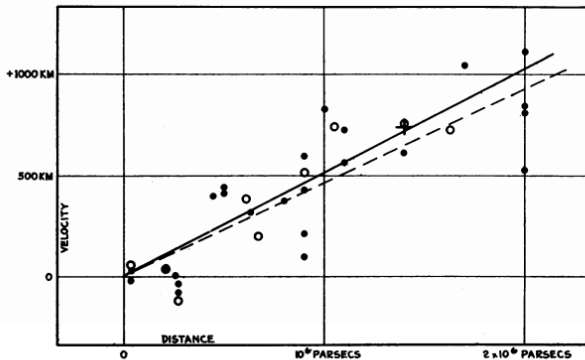


FIGURE 1

Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae.

Wprowadzenie

r - współrzędne fizyczne

x - współrzędne współporuszające się

$a(t)$ - czynnik skali

$$r = a(t)x \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = 0 \longrightarrow x = \text{const.} \quad (2)$$

$$v = \dot{a}(t)x + \cancel{a(t)\dot{x}}^0 \quad (3)$$

$$\frac{v}{r} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \quad (4)$$

Parametr i stała Hubble'a

$H(t)$ – parametr Hubble'a

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (5)$$

Dzisiaj

Jeśli rozważamy dzisiaj to $t = t_0$, to parametr Hubble'a nazywamy stałą Hubble'a.

$$H_0 = H(t_0) \quad (6)$$

H_0 – stała Hubble'a

Jest to jeden z podstawowych i najważniejszych parametrów kosmologicznych!

$$H_0 \approx 70 \frac{\text{km}}{\text{s}} / \text{Mpc} \quad (7)$$

Zasada zachowania energii

Zasada zachowania energii

Suma energii jest niezmienna w czasie.

$$E = E_K + E_P \quad (8)$$

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \quad / \cdot 2 / : m \quad (9)$$

$$\frac{2E}{m} = v^2 - \frac{2GM}{r} \quad / \text{wstawiamy } a(t) \quad (10)$$

$$\frac{2E}{m} = \dot{a}^2(t)x^2 - \frac{2GM}{a(t)x} \quad (11)$$

$$\frac{2E}{m} = \dot{a}^2(t)x^2 - \frac{2GM}{a(t)x} \quad (12)$$

Masa to gęstość razy objętość:

$$M = \rho V = \frac{4\pi}{3}a^3(t)x^3\rho \quad (13)$$

Podstawiamy:

$$\frac{2E}{m} = \dot{a}^2(t)x^2 - \frac{8\pi G\rho}{3}a^2(t)x^2 \quad / : a^2(t)x^2 \quad (14)$$

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{2E}{ma^2x^2} \quad (15)$$

Podstawiamy $kc^2 = -2E/m/x^2$

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \quad (16)$$

Równanie Friedmanna

Równanie Friedmanna

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \quad (17)$$

Równanie Friedmanna opisuje zmianę czynnika skali w czasie.

$$k = \frac{-2E}{mx^2c^2} = \text{const.} \quad (18)$$

k nie zmienia się w czasie!

Ale nie znamy jak zachowuje się gęstość ρ w RF!

Równanie cieczy

I i II zasada termodynamiki

$$dE + pdV = TdS \quad (19)$$

dE – zmiana energii

p – ciśnienie

dV – zmiana objętości

T – temperatura

dS – zmiana entropii

Entropia może być stała ($dS = 0$) lub rosnać. Dla rozszerzającego Wszechświata zakładamy proces odwracalny $dS = 0$.

$$dE + pdV = 0 \quad (20)$$

$$E = mc^2 = \rho V c^2 = \frac{4\pi}{3} a^3 x^3 \rho c^2 \quad (21)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4\pi}{3} x^3 c^2 \left(\dot{\rho} a^3 + 3\rho a^2 \dot{a} \right) \quad (22)$$

$$V = \frac{4\pi}{3} a^3 x^3 \quad (23)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{3} x^3 3a^2 \dot{a} \quad (24)$$

$$dE + pdV = 0 \quad (25)$$

$$\frac{4\pi}{3}x^3c^2 \left(\dot{\rho}a^3 + 3\rho a^2\dot{a} \right) + p\frac{4\pi}{3}x^33a^2\dot{a} = 0 \quad / : 4\pi x^3 \quad (26)$$

$$\frac{c^2}{3} \left(\dot{\rho}a^3 + 3\rho a^2\dot{a} \right) + pa^2\dot{a} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{c^2}{3}\dot{\rho}a^3 + c^2\rho a^2\dot{a} + pa^2\dot{a} = 0 \quad / : c^2 \quad (28)$$

$$\frac{a^3}{3}\dot{\rho} + a^2\dot{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad / : \frac{a^3}{3} \quad (29)$$

Równanie cieczy

Ewolucja gęstości cieczy (czyli Wszechświata)

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \quad (30)$$

Ale nie możemy powyższego równania rozwiązać dopóki nie wiemy jak ciśnienie p zależy od gęstości ρ .

Równanie stanu

Potrzebujemy znać równanie stanu!

$$p = w\rho c^2 \quad (31)$$

Jakie jest w ?

Równanie stanu

Równanie stanu

Potrzebujemy znać równanie stanu!

$$p = w\rho c^2 \quad (32)$$

Jakie jest w ?

$w = 0 \rightarrow$ dla materii

$w = 1/3 \rightarrow$ dla promieniowania

$w = -1 \rightarrow$ dla ciemnej energii

Równanie cieczy

Ewolucja gęstości dla materii

$$p = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad (33)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \quad / \cdot a^3 \quad (34)$$

$$\dot{\rho}a^3 + 3\dot{a}a^2\rho = \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \quad (35)$$

$$\rho a^3 = \text{const.} \quad (36)$$

$$\rho \propto \frac{1}{a^3} \quad (37)$$

Równanie cieczy

Ewolucja gęstości dla promieniowania

$$p = \frac{1}{3}\rho c^2 \quad \rightarrow \quad \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad (38)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{1}{3}\rho \right) = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{4}{3}\rho \right) = 0 \quad / \cdot a^4 \quad (39)$$

$$\dot{\rho}a^4 + 4\dot{a}a^3\rho = \frac{d}{dt} (\rho a^4) = 0 \quad (40)$$

$$\rho a^4 = \text{const.} \quad (41)$$

$$\rho \propto \frac{1}{a^4} \quad (42)$$

Równanie cieczy

Ewolucja gęstości dla ciemnej energii

$$p = -\rho c^2 \quad \rightarrow \quad \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad (43)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} (\rho - \rho) = 0 \quad (44)$$

$$\dot{\rho} = 0 \quad (45)$$

$$\rho = \text{const.} \quad (46)$$

Równanie Friedmanna

Równanie Friedmanna

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \quad (47)$$

Równanie Friedmanna opisuje zmianę czynnika skali w czasie.

Już znamy jak zachowuje się gęstość ρ w RF!

Równanie Friedmanna

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_R}{a^4} + \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_M}{a^3} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (48)$$

Równanie Friedmanna

Równanie Friedmanna

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_R}{a^4} + \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_M}{a^3} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad / \cdot \frac{H_0^2}{H_0^2} \quad (49)$$

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{8\pi G \rho_R}{3H_0^2} \frac{1}{a^4} + \frac{8\pi G \rho_M}{3H_0^2} \frac{1}{a^3} - \frac{kc^2}{H_0^2} \frac{1}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \right) \quad (50)$$

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_R \frac{1}{a^4} + \Omega_M \frac{1}{a^3} + \Omega_K \frac{1}{a^2} + \Omega_\Lambda \right) \quad (51)$$

$$\Omega_R = \frac{8\pi G \rho_R}{3H_0^2} \quad \Omega_M = \frac{8\pi G \rho_M}{3H_0^2} \quad \Omega_K = -\frac{kc^2}{H_0^2} \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \quad (52)$$

Równanie Friedmanna

Równanie Friedmanna

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_R}{a^4} + \frac{\Omega_M}{a^3} + \frac{\Omega_K}{a^2} + \Omega_\Lambda \right) \quad (53)$$

Równanie Friedmanna opisuje zmianę czynnika skali w czasie. Obecnie, czyli dzisiaj $a(t_0) = a_0 = 1$ oraz $H = H_0$, dlatego:

$$H_0^2 = H_0^2 (\Omega_R + \Omega_M + \Omega_K + \Omega_\Lambda) \quad (54)$$

czyli:

$$\Omega_R + \Omega_M + \Omega_K + \Omega_\Lambda = 1 \quad (55)$$

Równanie Friedmanna

Rozwiązania równania Friedmanna dla materii

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_R}{a^4} + \frac{\Omega_M}{a^3} + \frac{\Omega_K}{a^2} + \Omega_\Lambda \right) \quad (56)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{H_0^2 \Omega_M}{a^3} \rightarrow H_0^2 \Omega_M = \text{const.} = 1 \quad (57)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{1}{a^3} \quad / \cdot a^2 \quad / \sqrt{} \quad (58)$$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{1}{a}} \rightarrow \frac{dt}{da} = \sqrt{a} \quad (59)$$

$$dt = \sqrt{a} da \rightarrow t = \int \sqrt{a} da = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} \rightarrow \mathbf{a \propto t^{\frac{2}{3}}} \quad (60)$$

Równanie Friedmanna

Rozwiązania równania Friedmanna dla promieniowania

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_R}{a^4} + \frac{\Omega_M}{a^3} + \frac{\Omega_K}{a^2} + \Omega_\Lambda \right) \quad (61)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{H_0^2 \Omega_R}{a^4} \rightarrow H_0^2 \Omega_R = \text{const.} = 1 \quad (62)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{1}{a^4} \quad / \cdot a^2 \quad / \sqrt{} \quad (63)$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{a} \rightarrow \frac{dt}{da} = a \quad (64)$$

$$dt = a da \rightarrow t = \int a da = \frac{1}{2} a^2 \rightarrow \mathbf{a} \propto \mathbf{t}^{\frac{1}{2}} \quad (65)$$

Równanie Friedmanna

Rozwiązania równania Friedmanna dla ciemnej energii

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_R}{a^4} + \frac{\Omega_M}{a^3} + \frac{\Omega_K}{a^2} + \Omega_\Lambda \right) \quad (66)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 \Omega_\Lambda \quad \rightarrow \quad H_0^2 \Omega_\Lambda = \text{const.} = 1 \quad (67)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 1 \quad / \sqrt{} \quad (68)$$

$$\frac{da}{dt} = a \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{da} = \frac{1}{a} \quad (69)$$

$$dt = \frac{da}{a} \quad \rightarrow \quad t = \int \frac{da}{a} = \ln a \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \propto \mathbf{e}^t \quad (70)$$

Historia ewolucji Wszechświata

Ewolucja czynnika skali w czasie

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}} \quad \text{dla ery promieniowania} \quad (71)$$

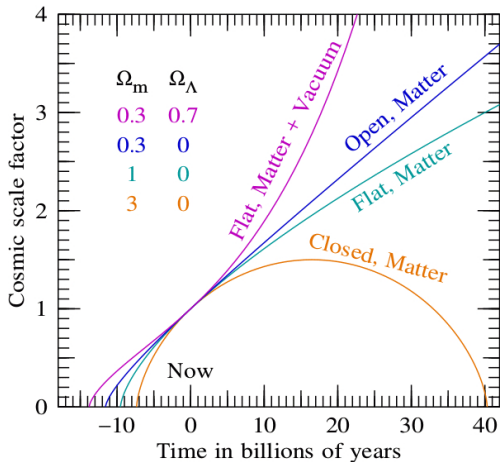
$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \quad \text{dla ery materii} \quad (72)$$

$$a(t) \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \quad \text{dla ery ciemnej energii} \quad (73)$$

Cofnijmy się w czasie

Dla $t \rightarrow 0$ czynnik skali $a(t) \rightarrow 0$. Wszechświat w momencie powstania musiał być bardzo mały – punktowy? osobliwość?

Historia ewolucji Wszechświata



https://jila.colorado.edu/~ajsh/courses/astr2010_22/evol.html

Historia ewolucji Wszechświata

Gęstość materii, promieniowania i ciemnej energii

$$\rho_M = \frac{\rho_{M,0}}{a^3} \quad (74)$$

$$\rho_R = \frac{\rho_{R,0}}{a^4} \quad (75)$$

$$\rho_\Lambda = \text{const.} \quad (76)$$

Energia fotonów

$$E_R = \frac{hc}{\lambda} \propto \frac{1}{a} \quad (77)$$

Historia ewolucji Wszechświata

Ciąg dalszy w kolejnym PDFie!