

Wprowadzenie do kosmologii klasycznej: odległości i wiek Wszechświata

Szymon Kozłowski

Uniwersytet Warszawski

2025



Czynnik skali i redshift

$a(t)$ - opisuje względny rozmiar Wszechświata

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)} \quad (1)$$

Równanie Friedmanna ($a_0 = 1$)

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_R}{a^4} + \frac{\Omega_M}{a^3} + \frac{\Omega_K}{a^2} + \Omega_\Lambda \right) \quad (2)$$

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_R (1 + z)^4 + \Omega_M (1 + z)^3 + \Omega_K (1 + z)^2 + \Omega_\Lambda \right) \quad (3)$$

Zjawiska we Wszechświecie “dzieją się” i w czasie i w przestrzeni. Aby zrozumieć relację dwóch zjawisk względem siebie musimy znać metrykę przestrzeni.

Metryka czasoprzestrzeni

Metryka czasoprzestrzeni to matematyczny opis geometrii czasoprzestrzeni, który określa jak odległości (interwały) między zdarzeniami są mierzone, uwzględniając zarówno wymiary przestrzenne, jak i czasowy.

Odległość przestrzenna, 2D, przestrzeń płaska - Euklidesowa (Pitagoras)

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 \quad (4)$$

Odległość przestrzenna w rozszerzającym się Wszechświecie, 2D, przestrzeń płaska

$$dl^2 = a(t)^2 (dx^2 + dy^2) \quad (5)$$

Odległość przestrzenna w rozszerzającym się Wszechświecie, 3D, przestrzeń płaska

$$dl^2 = a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (6)$$

x, y, z - współrzędne współporuszające się

Interwał Czasoprzestrzenny – ds

Interwał czasoprzestrzenny ds jest “odległością” czasoprzestrzenną pomiędzy dwoma zdarzeniami A i B. Jest on invariantem, czyli wszyscy obserwatorzy mierzą go jako taki sam. Jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 \quad (7)$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (8)$$

Tensor metryczny (kowariantny)

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

$\mu = 0, 1, 2, 3$ i $\nu = 0, 1, 2, 3$

0 – składowa czasowa

1 – składowa "x"

2 – składowa "y"

3 – składowa "z"

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (9)$$

$$ds^2 = \sum_{\mu} \sum_{\nu} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (10)$$

$$dx^0 = cdt, dx^1 = dx, dx^2 = dy, dx^3 = dz$$

$$ds^2 = g_{00}dx^0dx^0 + g_{11}dx^1dx^1 + g_{22}dx^2dx^2 + g_{33}dx^3dx^3 \quad (11)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Odległość przestrzenna 3D, przestrzeń płaska, współrzędne kartezjańskie

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (12)$$

x, y, z - współrzędne współporuszające się

Odległość przestrzenna 3D, przestrzeń płaska, współrzędne biegunowe

$$dl^2 = d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (13)$$

χ - współrzędna współporuszająca się

Metryka Friedmanna-Lemaitre'a-Robertsona-Walkera (FLRW)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(d\chi^2 + \begin{Bmatrix} \sin^2(\chi) \\ \chi^2 \\ \sinh^2(\chi) \end{Bmatrix} (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \right) \quad (14)$$

Metryka Friedmanna-Lemaitre'a-Robertsona-Walkera (FLRW)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{d\chi^2}{1 + k\chi^2} + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \right) \quad (15)$$

$$k = +1, k = 0, k = -1$$

Metryka Friedmanna-Lemaitre'a-Robertsona-Walkera (FLRW)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{d\chi^2}{1 + k\chi^2} + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right) \quad (16)$$

$$k = +1, k = 0, k = -1$$

Światło

Światło porusza się wzdłuż linii widzenia, dlatego $d\phi = 0$ i $d\theta = 0$. W płaskim Wszechświecie ($k = 0$) mamy

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)d\chi^2 \quad (17)$$

Światło

Światło porusza się wzdłuż współrzędnej χ , dlatego $d\phi = 0$ i $d\theta = 0$. W płaskim Wszechświecie ($k = 0$) mamy

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\chi^2 \quad (18)$$

Światło porusza się wzdłuż linii geodezyjnej dla której

$$ds = 0 \quad (19)$$

czyli światło w ogóle nie przebywa “dystansu w czasoprzestrzeni”.

$$d\chi = \frac{cdt}{a(t)} \quad (20)$$

Światło

$$d\chi = \frac{cdt}{a(t)} \quad (21)$$

$$\chi = \int_{\chi_{\text{em}}}^{\chi_{\text{obs}}} d\chi = \int_{t_{\text{em}}}^{t_{\text{obs}}} \frac{cdt}{a(t)} \quad (22)$$

Ale to co obserwujemy to redshift, zatem potrzebny jest redshift!

Przekształcenia

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \rightarrow \dot{a} = Ha \rightarrow \frac{da}{dt} = Ha \quad (23)$$

$$dt = \frac{da}{Ha} \quad (24)$$

$$a(t) = \frac{a_0}{1+z} = a_0 (1+z)^{-1} \quad (25)$$

$$\frac{da}{dz} = \frac{d}{dz} \left(a_0 (1+z)^{-1} \right) = -a_0 (1+z)^{-2} \quad (26)$$

$$da = -a_0 (1+z)^{-2} dz \quad (27)$$

Przekształcenia

$$\chi = \int_{\chi_{\text{em}}}^{\chi_{\text{obs}}} d\chi = \int_{t_{\text{em}}}^{t_{\text{obs}}} \frac{cdt}{a(t)} \quad (28)$$

$$dt = \frac{da}{Ha} \quad (29)$$

$$da = -a_0 (1+z)^{-2} dz \quad (30)$$

$$\chi(z_{\text{em}}) = \int_{z_{\text{em}}}^{z_{\text{obs}}} \frac{cda}{Ha(t)^2} \quad (31)$$

$$\chi(z_{\text{em}}) = \int_{z_{\text{em}}}^{z_{\text{obs}}} \frac{-ca_0 (1+z)^2 dz}{Ha_0^2 (1+z)^2} \quad (32)$$

Przekształcenia

$$\chi(z_{\text{em}}) = \int_{z_{\text{em}}}^{z_{\text{obs}}} \frac{-ca_0 (1+z)^2 dz}{Ha_0^2 (1+z)^2} \quad (33)$$

$$\chi(z_{\text{em}}) = -\frac{c}{a_0} \int_{z_{\text{em}}}^{z_{\text{obs}}} \frac{dz}{H(z)} \quad (34)$$

Podstawiamy: $z_{\text{em}} = z$, $z_{\text{obs}} = 0$, minus znika, bo zamieniamy granice całkowania; $a_0 = 1$:

$$\chi(z) = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (35)$$

Jest to odległość współporuszająca się wzdłuż linii widzenia (line-of-sight comoving distance).

Przekształcenia

$$\chi(z) = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (36)$$

$$H(z)^2 = H_0^2 \left(\Omega_R (1+z)^4 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_K (1+z)^2 + \Omega_\Lambda \right) \quad (37)$$

$$H(z)^2 = H_0^2 E(z)^2 \quad (38)$$

$$E(z) = \sqrt{\Omega_R (1+z)^4 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_K (1+z)^2 + \Omega_\Lambda} \quad (39)$$

Odległość współporuszająca

$$\chi(z) = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (40)$$

$$\chi(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (41)$$

$$\chi(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_R (1+z')^4 + \Omega_M (1+z')^3 + \Omega_K (1+z')^2 + \Omega_\Lambda}} \quad (42)$$

Luminosity distance

$$D_L = (1+z)a(t_{\text{obs}})\chi = (1+z)a_0\chi = (1+z)\chi \quad (43)$$

$$\chi(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (44)$$

$$D_L(z) = (1+z) \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (45)$$

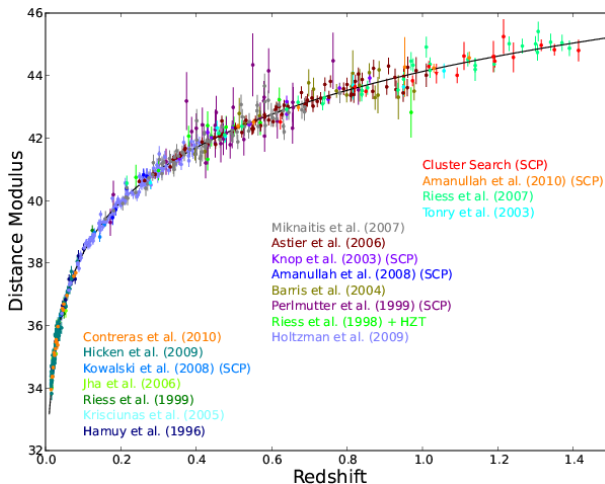
Odległość jasnościowa:

$$D_L(z) = (1+z) \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (46)$$

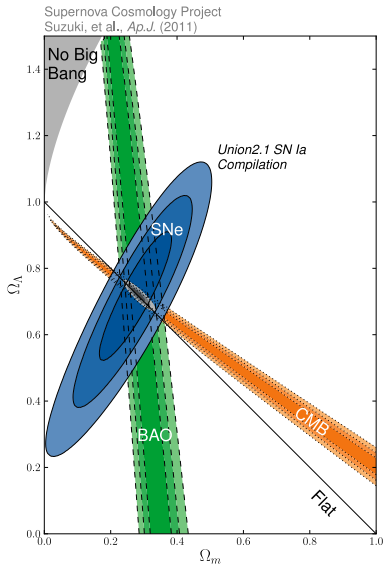
Moduł odległości:

$$\mu = m - M = 5 \log(D_L(z)) - 5 + A + K \quad (47)$$

Model kosmologiczny



Model kosmologiczny



Metryka Friedmanna-Lemaitre'a-Robertsona-Walkera (FLRW)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{d\chi^2}{1 + k\chi^2} + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right) \quad (48)$$

$$k = +1, k = 0, k = -1$$

Interwał prostopadły do linii widzenia

$$k = 0, d\chi = 0, d\phi = 0, dt = 0$$

$$ds^2 = a^2(t)\chi^2 d\theta^2 \quad (49)$$

Definicja

$$D_A = \frac{ds}{d\theta} \quad (50)$$

$$D_A = \frac{ds}{d\theta} = \frac{a(t)\chi d\theta}{d\theta} = a(t)\chi \quad (51)$$

$$D_A(z) = a(t)\chi = \frac{a_0}{1+z} \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (52)$$

$$D_A(z) = \frac{c}{(1+z)H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (53)$$

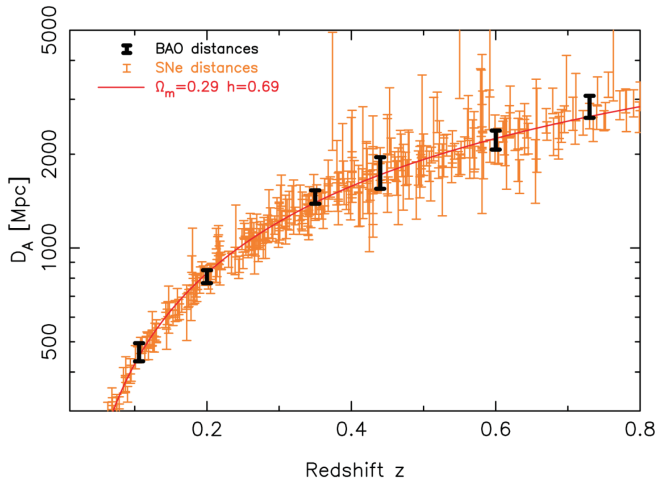
$$D_A(z) = \frac{c}{(1+z)H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (54)$$

$$D_L(z) = \frac{(1+z)c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (55)$$

Równanie Etheringtona (Etherington's Distance-Duality Equation):

$$D_L(z) = (1+z)^2 D_A(z) \quad (56)$$

Model kosmologiczny



WiggleZ – BAO

Model kosmologiczny

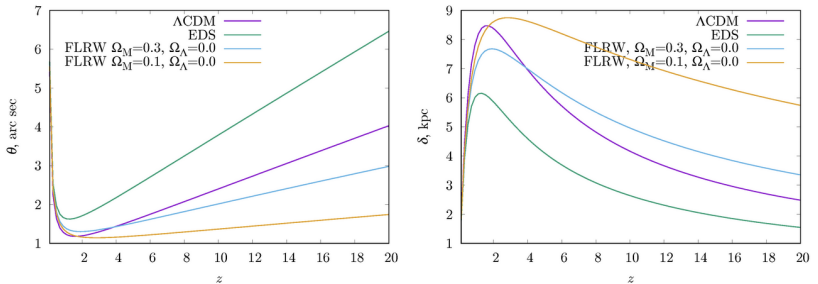


Figure 2. Angular diameter of a 10 kpc-size object (**left**) and the linear diameter δ of a one-arcsec-size object (**right**) as functions of redshift z , corresponding to various models within the expanding-universe framework (FLRW). The purple curves show the $\theta(z)$ relation for the standard Λ CDM model with $\Omega_M = 0.3$ and $H_0 = 70.0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. The green curves correspond to the Einstein-de Sitter Universe $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$. The blue and yellow curves show $\theta(z)$ for two values of Ω_M for FLRW models without dark energy.

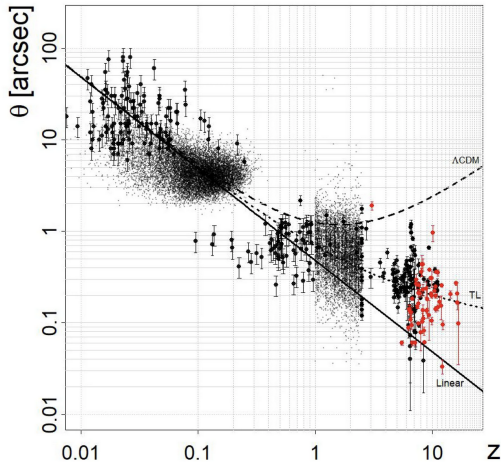


Figure 5. Angular diameters of a 10-kpc-size object as expected to be seen at different redshifts within the frameworks of Λ CDM (dashed curve) and of the non-expanding Universe model, TL (dotted curve). These expectations are compared with the actual angular sizes found in the recent JWST observations (red points) and some pre-JWST observations (black points). The solid curve indicates the simplest linear function for angular diameters based on the Hubble constant H_0 .

Przekształcenia

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \rightarrow \dot{a} = H a \rightarrow \frac{da}{dt} = H a \quad (57)$$

$$dt = \frac{da}{H a} = \frac{da}{dz} \frac{dz}{H a} \quad (58)$$

$$a(t) = \frac{a_0}{1+z} = a_0 (1+z)^{-1} \quad (59)$$

$$\frac{da}{dz} = \frac{d}{dz} \left(a_0 (1+z)^{-1} \right) = -a_0 (1+z)^{-2} \quad (60)$$

$$dt = - \frac{dz}{H_0 E(z) (1+z)} \quad (61)$$

Przekształcenia i lookback time

$$dt = -\frac{dz}{H_0 E(z)(1+z)} \quad (62)$$

$$t = \int_{t_1}^{t_2} dt = -\frac{1}{H_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{(1+z')E(z')} \quad (63)$$

Wiek Wszechświata

$$t = \frac{1}{H_0} \int_{z=0}^{z=\infty} \frac{dz'}{(1+z')\sqrt{\Omega_R(1+z')^4 + \Omega_M(1+z')^3 + \Omega_K(1+z')^2 + \Omega_\Lambda}} \quad (64)$$

Wiek Wszechświata i lookback time

$$t = \frac{1}{H_0} \int_{z_2}^{z_1} \frac{dz'}{(1+z')E(z')} \quad (65)$$

z_2	z_1	lookback time ($\times 10^9$ lat)
0	1	7.82
0	2	10.41
0	3	11.55
0	4	12.17
1	2	2.59
2	3	1.15
3	4	0.61
4	5	0.37
0	∞	13.73

dla $\Omega_M = 0.286$, $\Omega_\Lambda = 0.714$, $H_0 = 69.6$ km/s/Mpc